Grundwissen Mathematik am bayerischen Gymnasium (G8)

Richard Reindl

2004–2010

Das Grundwissen ist zweispaltig dargestellt, links die Definitionen, Sätze und Beweise, rechts Abbildungen und Beispiele.
Es handelt sich nicht nur um einen Grundwissenskatalog, sondern um eine kompakte Darstellung des Stoffes mit den notwendigen Herleitungen und Beweisen. Daher eignet sich der Text zur Wiederholung und zum Selbsstudium des Stoffes.
Die Auswahl des Stoffes beruht auf meinem Unterricht und den von mir gesetzten Schwerpukten und Vertiefungen, ist also nicht unbedingt eine 1:1-Umsetzung des Lehrplans. Es wird auch kein Anspruch auf Vollständigkeit erhoben.

Grundwissen Mathematik – Jahrgangsstufe 5

Zahlen

Definitionen und Regeln	**Beispiele**
Zahlenmengen	
Eine Zusammenfassung von Zahlen nennt man eine *Zahlenmenge*. Die Elemente einer Menge müssen verschieden sein.	$A = \{2, 5, 7, 8, 9\}$ $\{2, 2, 2, 3, 4, 4\} = \{2, 3, 4\}$
x ist ein Element von A: $x \in A$ x ist kein Element von A: $x \notin A$	$5 \in A$ $1 \notin A$
Die Menge $\emptyset = \{\ \}$, die kein Element enthält, heißt *leere Menge*.	$\{\ \}$ oder $\emptyset$
Die Anzahl der Elemente einer Menge nennt man ihre *Mächtigkeit*. $\lvert A\rvert =$ Zahl der Elemente von A	$\lvert\{2, 4, 5, 6\}\rvert = 4$ $\lvert\{\ \}\rvert = 0, \quad \lvert\{0\}\rvert = 1$
Ist jedes Element von A auch ein Element von B, dann ist A in B enthalten oder A ist eine *Teilmenge* von B: $A \subset B$ Jede Menge ist Teilmenge von sich selbst: $A \subset A$	$\{5, 8, 9\} \subset \{2, 5, 7, 8, 9\}$ Die leere Menge ist Teilmenge von jeder Menge: $\{\ \} \subset A$ bzw. $\emptyset \subset A$ (A beliebige Menge)
Mengen kann man durch bestimmte Eigenschaften der Elemente angeben: $\{\, x \mid \text{Eigenschaft}\} =$ Menge aller Zahlen x mit der Eigenschaft	$\{\, x \mid x \text{ gerade und } 3 \leqq x < 10\} = \{4, 6, 8\}$ $\{\, x \mid x \text{ durch 3 teilbar und } 3 \leqq x < 18\} = \{3, 6, 9, 12, 15\}$ $\{\, x \mid x \in \mathbb{N},\ x \text{ durch 3 und durch 5 teilbar}\} = \{15, 30, 45, \ldots\}$
Alle Elemente, die gleichzeitig in zwei Mengen vorkommen, bilden ihre *Durchnittsmenge*: $A \cap B = \{\, x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$	$\{1, 2, 5, 6, 8, 9\} \cap \{2, 4, 6, 7, 9\} = \{2, 6, 9\}$ $\{1, 3, 5, 7\} \cap \{2, 4, 6, 8\} = \{\ \}$ $A \cap \{\ \} = \{\ \}$ bzw. $A \cap \emptyset = \emptyset$
Eine Zahl gehört zur *Vereinigungsmenge* von A und B, wenn sie entweder Element von A oder Element von B oder Element von beiden Mengen ist: $A \cup B = \{\, x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$	$\{1, 2, 5\} \cup \{3, 4, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\{1, 2, 5, 6\} \cup \{2, 4, 6\} = \{1, 2, 4, 5, 6\}$ $A \cup \{\ \} = A$ bzw. $A \cup \emptyset = A$
A ohne B: $A \backslash B = \{\, x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \setminus \{2, 4, 6\} = \{1, 3, 5, 7\}$ $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\} \setminus \{2, 4, 6, 8, 10\} = \{3, 5, 7\}$ $A \backslash \{\ \} = A$ bzw. $A \backslash \emptyset = A$
$\mathbb{N} =$ Menge der natürlichen Zahlen	$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$
$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$	$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$
$\mathbb{Z} =$ Menge der ganzen Zahlen	$\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$
$\mathbb{Z}^- =$ Menge der negativen ganzen Zahlen	$\mathbb{Z}^- = \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0$

Definitionen und Regeln	**Beispiele**
Grundrechenarten **Addition**, addieren: 1. Summand + 2. Summand = Wert der Summe	$\underbrace{3+5}_{\text{Summe}} = \underbrace{8}_{\text{Wert der Summe}}$ 3 plus 5 gleich 8
Subtraktion, subtrahieren: Minuend − Subtrahend = Wert der Differenz	$\underbrace{8-3}_{\text{Differenz}} = \underbrace{5}_{\text{Wert der Differenz}}$ 8 minus 3 gleich 5
Multiplikation, multiplizieren: 1. Faktor · 2. Faktor = Wert des Produkts $a \cdot b = \underbrace{b + b + \ldots + b}_{a \text{ Summanden}}$	$\underbrace{3 \cdot 5}_{\text{Produkt}} = \underbrace{15}_{\text{Wert des Produkts}}$ 3 mal 5 gleich 15 $3 \cdot 5 = 5 + 5 + 5$
Division, dividieren: Dividend : Divisor = Wert des Quotienten Teilung: Aufteilen in gleiche Teile Messung: Wie oft enthalten	$\underbrace{15:3}_{\text{Quotient}} = \underbrace{5}_{\text{Wert des Quotienten}}$ 15 dividiert durch 3 gleich 5 24 m : 3 = 8 m 24 m : 3 m = 8
Potenz, potenzieren: $\text{Basis}^{\text{Exponent}} = \text{Wert der Potenz}$ $\boxed{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}}$	$\underbrace{3^5}_{\text{Potenz}} = \underbrace{243}_{\text{Wert der Potenz}}$ 3 hoch 5 gleich 243 $3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$
Definition: $a^0 = 1$ für $a > 0$ $\boxed{a^0 = 1, \quad a^1 = a, \quad 0^n = 0 \quad 1^n = 1}$	$2^0 = 1$, $7^0 = 1$, 0^0 nicht definiert $9^0 = 1, \quad 6^1 = 6, \quad 0^7 = 0 \quad 1^8 = 1$
$a^2 = a \cdot a$ heißt auch „a Quadrat“. Quadratzahlen von 0^2 bis 20^2, zusätzlich 25^2 auswendig!	$0^2 = 0$, $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4^2 = 16$, $5^2 = 25$, $6^2 = 36$, $7^2 = 49$, $8^2 = 64$, $9^2 = 81$, $10^2 = 100$, $11^2 = 121$, $12^2 = 144$, $13^2 = 169$, $14^2 = 196$, $15^2 = 225$, $16^2 = 256$, $17^2 = 289$, $18^2 = 324$, $19^2 = 361$, $20^2 = 400$, $25^2 = 625$
Zweierpotenzen von 2^0 bis 2^{10} auswendig!	$2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 32$, $2^6 = 64$, $2^7 = 128$, $2^8 = 256$, $2^9 = 512$, $2^{10} = 1024$
Zehnerpotenzen: $\boxed{10^n = 1 \text{ mit } n \text{ Nullen}}$	$10^0 = 1, \quad 10^1 = 10, \quad 10^2 = 100$ $10^3 = 1000, \quad 7 \cdot 10^5 = 700\,000$
10^6 = Million 10^9 = Milliarde 10^{12} = Billion 10^{15} = Billiarde	10^{18} = Trillion 10^{24} = Quadrillion 10^{30} = Quintillion 10^{36} = Sextillion
Jede Zahl des *Dezimalsystems* (Zehnersystems) kann als Summe von Zehnerpotenzen geschrieben werden.	$68047 = 6 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$

Definitionen und Regeln	**Beispiele**
Rechenregeln	
Reihenfolge einer Rechnung: $\boxed{\textbf{Klammer – Potenz – Punkt – Strich}}$	$28-3\cdot(7-5)^3=28-3\cdot 2^3=$ $=28-3\cdot 8=28-24=4$
Klammern von innen nach außen!	$[(15-8)\cdot 2-2\cdot 4]^3=[7\cdot 2-2\cdot 4]^3=$ $=[14-8]^3=6^3=216$
$\boxed{\begin{array}{llll} a+0=a & a-0=a & a\cdot 1=a & a:1=a \\ a-a=0 & a:a=1 & a\cdot 0=0 & 0:a=0 \end{array}}$	$7+0=7-0=7,\quad 7\cdot 1=7:1=7$ $7-7=0\cdot 7=0:7=0,\quad 7:7=1$
$\boxed{a:0 \text{ und } 0:0 \text{ sind nicht definiert!!}}$	
$\boxed{a+b=b+a \qquad a\cdot b=b\cdot a}$ (Kommutativgesetze, KG)	$3+7=7+3=10,\quad 3\cdot 7=7\cdot 3=21$
$\boxed{\begin{array}{c} a+b+c=(a+b)+c=a+(b+c) \\ a\cdot b\cdot c=(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c) \end{array}}$ (Assoziativgesetze, AG)	$2+5+7=\underbrace{(2+5)}_{7}+7=2+\underbrace{(5+7)}_{12}=14$
$\boxed{\begin{array}{c} a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \\ a\cdot(b-c)=a\cdot b-a\cdot c \end{array}}$ (Distributivgesetze, DG)	$8\cdot(7+3)=8\cdot 10=80$ oder $8\cdot(7+3)=8\cdot 7+8\cdot 3=56+24=80$ $7\cdot 998=7\cdot(1000-2)=7\cdot 1000-7\cdot 2=$ $=7000-14=6986$
$\boxed{\begin{array}{ll} x+a=b \Rightarrow x=b-a & x\cdot a=b \Rightarrow x=b:a \\ x-a=b \Rightarrow x=b+a & x:a=b \Rightarrow x=b\cdot a \end{array}}$	$x+8=15 \Rightarrow x=15-8=7$ $x-8=15 \Rightarrow x=15+8=23$ $x\cdot 8=72 \Rightarrow x=72:8=9$ $x:8=7 \Rightarrow x=7\cdot 8=56$
Der kleine Gauß: $1+2+3+\ ...\ +n=n\cdot(n+1):2$	$1+2+3+4+\ ...100=100\cdot 101:2=5050$
Teilbarkeit	
Die *Vielfachenmenge* einer Zahl a ist die Menge aller Vielfachen von a. $\mathrm{V}(a)=\{\,x \mid x=n\cdot a \text{ mit } n\in\mathbb{N}\}$	$\mathrm{V}(6)=\{6,12,18,24,\ ...\ \}$ $\mathrm{V}(2)=$ Menge der geraden Zahlen
a ist Teiler von b, wenn b ein Vielfaches von a ist.	
$a \mid b \iff b=n\cdot a \quad \text{mit} \quad n\in\mathbb{N}$ $a \mid b \;\text{ und }\; a \mid c \implies a \mid (b+c) \;\text{ und }\; a \mid (b-c)$ $a \mid b \;\text{ und }\; b \mid c \implies a \mid c$	$7 \mid 35 \quad \text{weil} \quad 35=5\cdot 7$ $9 \mid 99 \;\text{ und }\; 9 \mid 27 \implies 9 \mid (99+27)=126$ $12 \mid 60 \;\text{ und }\; 60 \mid 180 \implies 12 \mid 180$
Für jede natürliche Zahl a gilt $1 \mid a$ und $a \mid a$.	
Die *Teilermenge* einer Zahl a ist die Menge aller Teiler von a. $\mathrm{T}(a)=\{\,x \mid x \mid a\}=\{\,x \mid x \text{ Teiler von } a\}$ Für $a \geqq 2$ ist $\lvert\mathrm{T}(a)\rvert \geqq 2$ $\lvert\mathrm{T}(a)\rvert$ ist ungerade $\iff$ a ist Quadratzahl	$\mathrm{T}(6)=\{1,2,3,6\}$ $\mathrm{T}(48)=\left\{\begin{array}{ccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 6 \\ 48, & 24, & 16, & 12, & 8 \end{array}\right\}$ $\mathrm{T}(36)=\left\{\begin{array}{ccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 6 \\ 36, & 18, & 12, & 9 & \end{array}\right\}$ $\lvert\mathrm{T}(6)\rvert=4,\ \lvert\mathrm{T}(48)\rvert=10,\ \lvert\mathrm{T}(36)\rvert=9$
Teilung mit Rest: $\boxed{d:s=e\,\mathrm{R}\,r \iff d=s\cdot e+r \text{ mit } r<s}$	$30:7=4\,\mathrm{R}\,2,$ weil $30=7\cdot 4+2$

Definitionen und Regeln	**Beispiele**
Teilbarkeitsregeln	
x ist durch 2 teilbar, wenn die letzte Ziffer von x durch 2 teilbar oder 0 ist.	$2 \mid 1378$, da $2 \mid 8$, $2 \nmid 4441$, da $2 \nmid 1$ $2 \mid 13330$
x ist durch 4 teilbar, wenn die aus den letzten beiden Ziffern von x gebildete Zahl durch 4 teilbar oder 00 ist.	$4 \mid 1324$, da $4 \mid 24$, $4 \nmid 4442$, da $4 \nmid 42$ $4 \mid 13300$
x ist durch 5 teilbar, wenn die letzte Ziffer von x 5 oder 0 ist.	$5 \mid 1375$, $5 \mid 9970$, $5 \nmid 5058$
x ist durch 25 teilbar, wenn die letzten beiden Ziffer von x 00, 25, 50 oder 75 sind.	$25 \mid 1375$, $25 \mid 9900$, $25 \nmid 5055$
Die *Quersumme* (QS) einer Zahl ist die Summe ihrer Ziffern.	$QS(73024) = 7 + 3 + 0 + 2 + 4 = 16$
Eine Zahl ist durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.	$3 \mid 1377$ weil $\mathrm{QS}(1377) = 18$ und $3 \mid 18$ $3 \nmid 505$ weil $\mathrm{QS}(505) = 10$ und $3 \nmid 10$
Eine Zahl ist durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.	$9 \mid 5877$ weil $\mathrm{QS}(5877) = 27$ und $9 \mid 27$ $9 \nmid 987$ weil $\mathrm{QS}(987) = 24$ und $9 \nmid 24$
Primzahlen	
Eine natürliche Zahl heißt *Primzahl* oder kurz *prim*, wenn ihre Teilermenge genau zwei Elemente enthält, d.h. wenn sie nur durch eins und sich selbst ohne Rest teilbar ist.	$\mathrm{T}(7) = \{1, 7\} \implies$ 7 ist prim $\mathrm{T}(87) = \{1, 3, 29, 87\} \implies$ 87 ist nicht prim
$\boxed{x \text{ prim} \iff \lvert\mathrm{T}(x)\rvert = 2}$ $\boxed{\text{Es gibt unendlich viele Primzahlen.}}$	Menge der Primzahlen: $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, ...\}$
Jede natürliche Zahl größer als eins lässt sich eindeutig als Produkt von Primzahlen schreiben (*Primfaktorenzerlegung*).	$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$, $51 = 3 \cdot 17$ $81 = 3^4$, $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ $2102100 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$
Menge der gemeinsamen Teiler von a und b: $\mathrm{T}(a, b) = \mathrm{T}(a) \cap \mathrm{T}(b)$ Das größte Element von $\mathrm{T}(a, b)$ ist der *größte gemeinsame Teiler* (ggT) von a und b.	$\mathrm{T}(12, 18) = \left\{ \begin{matrix} 1, & 2, & 3 \\ 12, & 6, & 4 \end{matrix} \right\} \cap \left\{ \begin{matrix} 1, & 2, & 3 \\ 18, & 9, & 6 \end{matrix} \right\} =$ $= \{1, 2, 3, \boxed{6}\} \implies \mathrm{ggT}(12, 18) = 6$
Praktisch findet man den $\mathrm{ggT}(a, b)$ mit Hilfe der Primfaktorenzerlegung von a und b oder mit der *Kettendivision*:	$\left. \begin{matrix} 36 = \boxed{2} \cdot 2 \cdot \boxed{3 \cdot 3} \\ 54 = \boxed{2} \cdot 3 \cdot \boxed{3 \cdot 3} \end{matrix} \right\} \mathrm{ggT}(36, 54) = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$
Man teilt die größere durch die kleinere Zahl. Man teilt immer wieder den Divisor durch den Rest, bis der Rest null herauskommt. Der letzte Divisor ist der gesuchte ggT.	$126 : 70 = 1\,\mathrm{R}\,56$ $70 : 56 = 1\,\mathrm{R}\,14$ $56 : \boxed{14} = 4\,\mathrm{R}\,\boxed{0} \implies \mathrm{ggT}(126, 70) = 14$
Menge der gemeinsamen Vielfachen von a und b: $\mathrm{V}(a, b) = \mathrm{V}(a) \cap \mathrm{V}(b)$ Das kleinste Element von $\mathrm{V}(a, b)$ ist das *kleinste gemeinsame Vielfache* (kgV) von a und b.	$\mathrm{V}(6, 8) = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, ...\} \cap$ $\cap \{8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, ...\} = \{24, 48, ...\}$ $\implies \mathrm{kgV}(6, 8) = 24$

Definitionen und Regeln | **Beispiele**

Praktisch findet man das kgV(a,b) mit Hilfe der Primfaktorenzerlegung von a und b oder mit folgendem Zusammenhang, wobei man den ggT(a,b) mit der Kettendivision ermittelt:

$$\text{ggT}(a,b)\cdot\text{kgV}(a,b) = a\cdot b$$

$$\left.\begin{array}{l} 36 = \boxed{2\cdot 2}\cdot 3\cdot 3 \\ 54 = 2\cdot\boxed{3\cdot 3\cdot 3}\end{array}\right\}\ \text{kgV}(36,54) = \underbrace{2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3}_{108}$$

$$\text{kgV}(36,54) = \underbrace{36\cdot 54}_{1944} : \underbrace{\text{ggT}(36,54)}_{18} = 108$$

Ganze Zahlen

Die *Spiegelzahl* von a ist $-a$, die Spiegelzahl von $-a$ ist a: $-(-a) = a$.

$$a > 0 \Longrightarrow -a < 0 \qquad a < 0 \Longrightarrow -a > 0$$

$b < a$, wenn b auf der Zahlengeraden links von a.

Der *Betrag* einer Zahl ist ihr Abstand vom Nullpunkt auf der Zahlengeraden:

$$|a| = \begin{cases} +a & \text{wenn } a \geqq 0 \\ -a & \text{wenn } a < 0 \end{cases}$$

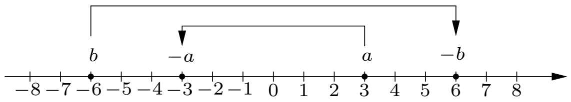
$$|a| = |-a| \qquad |a| \geqq 0$$

Rechenregeln für ganze Zahlen:

$$\boxed{\begin{array}{c} +(+a) = +a = a \qquad +(-a) = -a \\ -(-a) = +a = a \qquad -(+a) = -a \\ a - b = -(b-a) \\ -a - b = -(a+b) \\ a\cdot(-b) = (-a)\cdot b = -(a\cdot b) \\ (-a)\cdot(-b) = a\cdot b \\ a:(-b) = (-a):b = -(a:b) \\ (-a):(-b) = a:b \\ \text{Kommutativgesetze} \\ \text{Assoziativgesetze} \\ \text{Distributivgesetz} \end{array}}$$

$$(-1)^1 = -1, \quad (-1)^2 = 1, \quad (-1)^3 = -1$$

$$\boxed{(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{für gerades } n \\ -1 & \text{für ungerades } n \end{cases}}$$



$$-(+3) = -3 \qquad -(-6) = +6 = 6$$

$$(-7) < (-3) \qquad (-3) < 2 \qquad 2 < 3$$

$$|6| = 6 \qquad |-6| = -(-6) = 6$$

$5 + (-12) = 5 - 12 = -(12-5) = -7$

$-5 + (-12) = -5 - 12 = -(5+12) = -17$

$3\cdot(-5) = (-3)\cdot 5 = -15$

$(-3)\cdot(-5) = +15 = 15$

$30 : (-5) = (-30) : 5 = -6$

$(-30) : (-5) = +6 = 6$

$3+(-5) = (-5)+3 \qquad (-9)+(-7) = (-7)+(-9)$

$$\underbrace{(-4) + \underbrace{[(-7)+3]}_{(-4)}}_{-(4+4)=-8} = \underbrace{\underbrace{[(-4)+(-7)]}_{-(4+7)=-11} +3}_{-(11-3)=-8}$$

$$\underbrace{(-4)\cdot\underbrace{[(-7)+3]}_{(-4)}}_{4\cdot 4=16} = \underbrace{\underbrace{(-4)\cdot(-7)}_{+28} + \underbrace{(-4)\cdot 3}_{(-12)}}_{28-12=16}$$

$(-1)^{44} = 1, \quad (-1)^{17} = -1, \quad (-1)^{100} = 1$

$(-2)^2 = 4, \quad (-2)^3 = -8, \quad (-2)^9 = -512$

Abzählen von Möglichkeiten

Platz 1 kann mit z_1, Platz 2 mit z_2, ... und Platz n mit z_n verschiedenen Gegenständen besetzt werden. Dann können alle n Plätze auf

$$z_1\cdot z_2\cdot z_3\cdot\ \ldots\ \cdot z_n$$

verschiedene Arten belegt werden.

3 Hüte, 7 T-Shirts und 4 Hosen kann man auf

$$3\cdot 7\cdot 4 = 84$$

verschiedene Arten miteinander kombinieren.

n verschiedene Gegenstände kann man auf

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ \ldots\ \cdot n$$

verschiedene Arten auf n Plätze verteilen.

5 Personen kann man auf

$$5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$$

verschiedene Arten in einer Reihe aufstellen.

Definitionen und Regeln	**Beispiele**

Zahlensysteme*

Die *Basis* des Zehnersystems (Dezimalsystems) ist 10, die *Stufenzahlen* sind die Zehnerpotenzen, es gibt zehn Ziffern.

Stufenzahlen: $10^0 = 1, 10^1 = 10, 10^2 = 100, ...$
Ziffern: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$

$$3784 = 3 \cdot \underbrace{10^3}_{1000} + 7 \cdot \underbrace{10^2}_{100} + 8 \cdot \underbrace{10^1}_{10} + 4 \cdot \underbrace{10^0}_{1}$$

$$3007004 = 3 \cdot \underbrace{10^6}_{1000000} + 7 \cdot \underbrace{10^3}_{1000} + 4 \cdot \underbrace{10^0}_{1}$$

Jede natürliche Zahl $b \geqq 2$ kann als Basis eines Zahlensystems verwendet werden. Die Stufenzahlen sind dann die Potenzen von b, es gibt b Ziffern von 0 bis $b - 1$.

Stufenzahlen: $b^0 = 1, b^1 = b, b^2, b^3, b^{4,} ...$
Ziffern: $0, 1, 2, \ldots b - 1$

$$(2905)_b = 2 \cdot b^3 + 9 \cdot b^2 + 0 \cdot b^1 + 5 \cdot b^0$$

Die Basis des Zweiersystems (Dualsystems) ist 2, die Stufenzahlen sind die Zweierpotenzen, es gibt nur zwei Ziffern (0, 1).

Stufenzahlen: $2^0 = 1, 2^1 = 2, 2^2 = 4, ...$
Ziffern: $0, 1$ oder O, L

$$\mathrm{LOL} = (101)_2 = 1 \cdot \underbrace{2^2}_{4} + 0 \cdot \underbrace{2^1}_{2} + 1 \cdot \underbrace{2^0}_{1} = 5$$

dual	L	LO	LL	LOO	LOL	LLO	LLL
dezimal	1	2	3	4	5	6	7

dual	LOOO	LOOL	LOLO	LOLL	LLOO
dezimal	8	9	10	11	12

$\mathrm{LOLL} = 8 + 0 + 2 + 1 = 11$

$\mathrm{LOLLOLL} = 64 + 0 + 16 + 8 + 0 + 2 + 1 = 91$

Die Basis des Sechzehnersystems (Hexadezimalsystems) ist 16, die Stufenzahlen sind die Potenzen von 16, es gibt 16 Ziffern.

Stufenzahlen: $16^0 = 1, 16^1 = 16, 16^2 = 256, ...$

Ziffern:	0 bis 9	A	B	C	D	E	F
		10	11	12	13	14	15

In der Computerliteratur werden Hexzahlen oft mit einem Dollarzeichen geschrieben:

$$(\mathrm{A0B})_{16} = \$\mathrm{A0B}$$

$$\$\mathrm{FF} = 15 \cdot \underbrace{16^1}_{16} + 15 \cdot \underbrace{16^0}_{1} = 255$$

$$\$100 = 1 \cdot \underbrace{16^2}_{256} + 0 \cdot \underbrace{16^1}_{16} + 0 \cdot \underbrace{16^0}_{1} = 256$$

$$\$\mathrm{AFF} = 10 \cdot \underbrace{16^2}_{256} + 15 \cdot \underbrace{16^1}_{16} + 15 \cdot \underbrace{16^0}_{1} = 2815$$

Größen

Vorsilben

Name	Abk.	Wert
Hekto	h	$\cdot 100$
Kilo	k	$\cdot 1000$
Mega	M	$\cdot 10^6$
Giga	G	$\cdot 10^9$
Tera	T	$\cdot 10^{12}$
Dezi	d	$: 10$
Zenti	c	$: 100$
Milli	m	$: 1000$
Mikro	µ	$: 10^6$
Nano	n	$: 10^9$
Piko	p	$: 10^{12}$
Femto	f	$: 10^{15}$

Benennungen

m	g	€	Ct	l
Meter	Gramm	Euro	Cent	Liter

s	min	h	d	a
Sekunde	Minute	Stunde	Tag	Jahr

Länge
1 km = 1000 m
1 m = 10 dm = 100 cm = 1000 mm
1 mm = 1000 µm = 10^6 nm
1 µm = 1 µ = 1000 nm = 10^6 pm
1 nm = 1000 pm

Zeit
1 h = 60 min = 3600 s
1 min = 60 s
1 s = 1000 ms = 10^6 µs
1 ms = 1000 µs = 10^6 ns
1 µs = 1000 ns = 10^6 ps
1 ns = 1000 ps

Definitionen und Regeln

Bei der Kommaschreibweise von Größen bezieht sich die Einheit (Benennung) auf die Stelle vor dem Komma:

$$\overbrace{1234{,}56789\,\mathrm{m}}^{\text{Kommaschreibweise}} = \overbrace{1\,\mathrm{km}\,234\,\mathrm{m}\,567\,\mathrm{mm}\,890\,\mu}^{\text{gemischte Schreibweise}}$$

$$\overbrace{1234{,}56789\,\mathrm{kg}}^{\text{Kommaschreibweise}} = \overbrace{1\,\mathrm{t}\,234\,\mathrm{kg}\,567\,\mathrm{g}\,890\,\mathrm{mg}}^{\text{gemischte Schreibweise}}$$

Beispiele

Masse $1\,\mathrm{t} = 1\,\text{Tonne} = 1000\,\mathrm{kg} = 10^6\,\mathrm{g}$

$1\,\mathrm{Ztr} = 1\,\text{Zentner} = 50\,\mathrm{kg}$

$1\,\mathrm{kg} = 1000\,\mathrm{g} = 10^6\,\mathrm{mg}$

$1\,\mathrm{g} = 1000\,\mathrm{mg} = 10^6\,\mu\mathrm{g}$

$1\,\mathrm{mg} = 1000\,\mu\mathrm{g} = 10^6\,\mathrm{ng}$

$1\,\mu\mathrm{g} = 1000\,\mathrm{ng} = 10^6\,\mathrm{pg}$

$1\,\mathrm{ng} = 1000\,\mathrm{pg}$

Geometrie

Definitionen und Regeln

Elemente der Geometrie

Die Geometrie handelt von *Punkten* (keine Ausdehnung, nulldimensional), Linien (eindimensional), Flächen (zweidimensional) und räumlichen Körpern (dreidimensional). Eine *Gerade* ist eine nach beiden Seiten unendlich lange, gerade Linie.

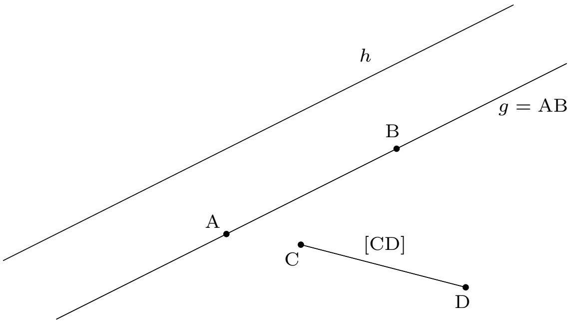
Durch zwei Punkte A und B läßt sich genau eine Gerade $g = \mathrm{AB}$ zeichnen.

Sind C und D zwei Punkte, dann ist die *Strecke* [CD] der Teil der Geraden CD zwischen den Punkten C und D. Die Randpunkte C und D gehören zur Strecke [CD].

$$\boxed{\overline{\mathrm{CD}} = \text{Länge der Strecke [CD]}}$$

Geraden und Strecken sind Punktmengen.

Beispiele



Zwei Geraden heißen parallel, wenn sie keinen Schnittpunkt haben (g und h sind parallel).

Geometrische Figuren

Drei Punkte A, B und C, die nicht auf einer Geraden liegen, bilden das Dreieck ABC ($\Delta\,\mathrm{ABC}$). A, B und C sind die *Ecken*, [AB], [BC] und [CA] die *Seiten* des Dreiecks. Ein Dreieck hat also drei Ecken und drei Seiten. Ein Viereck hat vier Ecken und vier Seiten usw.

Ein *Rechteck* ist ein Viereck, in dem je zwei benachbarte Seiten einen rechten Winkel bilden (senkrecht aufeinander stehen).

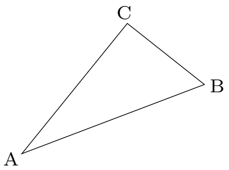
Zwei gegenüberliegende Seiten im Rechteck sind gleich lang.

Ein Rechteck mit vier gleich langen Seiten heißt *Quadrat*.

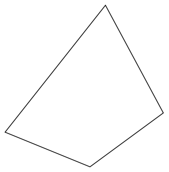
Ist M_Q die Menge aller Quadrate, M_R die Menge aller Rechtecke und M_V die Menge aller Vierecke, dann gilt

$$M_\mathrm{Q} \subsetneqq M_\mathrm{R} \subsetneqq M_\mathrm{V}$$

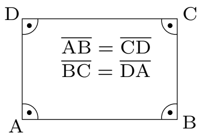
oder in Worten: Jedes Quadrat ist ein Rechteck und jedes Rechteck ist ein Viereck.



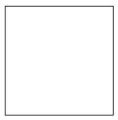
Dreieck



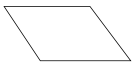
Viereck



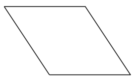
Rechteck



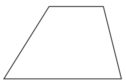
Quadrat



Parallelogramm:
Je zwei gegenüberliegende Seiten sind parallel



Raute:
Alle vier Seiten sind gleich lang



Trapez:
Ein gegenüberliegendes Seitenpaar ist parallel

Definitionen und Regeln

Beispiele

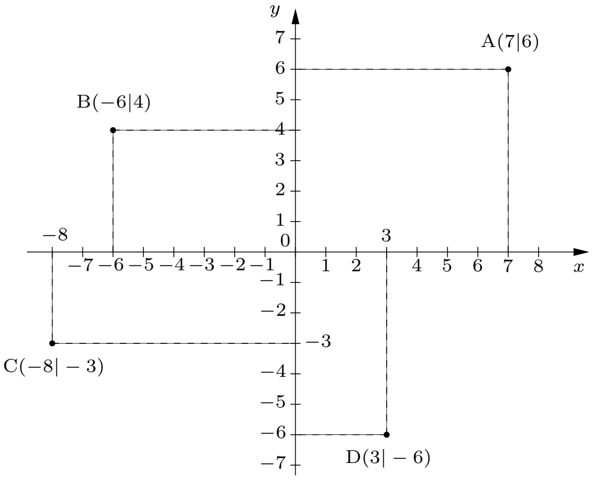
Koordinaten

Das (kartesische) *Koordinatensystem* besteht aus zwei zueinander senkrechten Achsen. Die waagrechte Achse heißt *Abszissenachse* oder kurz *Abszisse* (wird oft auch als x-Achse bezeichnet), die senkrechte Achse ist die *Ordinatenachse*, kurz *Ordinate* (oder oft y-Achse). Der Schnittpunkt der beiden Achsen ist der *Ursprung* des Koordinatensystems. Ein Punkt wird durch seinen Namen und die beiden Koordinaten, die Abszisse und die Ordinate, angegeben:

$$\mathrm{A}(\text{Abszisse}\,|\,\text{Ordinate})$$

Man findet den Punkt, wenn man vom Ursprung aus um den Wert der Abszisse nach rechts und um den Wert der Ordinate nach oben geht. Die *Einheiten* des Koordinatensystems geben an, wie weit die Eins auf den Achsen vom Ursprung entfernt ist. Die Einheiten auf der Abszisse und der Ordinaten können verschieden sein.

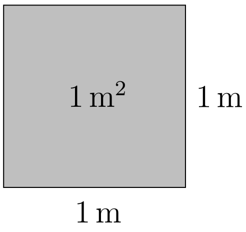
Das folgende Koordinatensystem hat gleiche Einheiten auf beiden Achsen.



Der Punkt A(6|7) hat die Abszisse 7 und die Ordinate 6.

Flächenmaße

Ein Quadrat mit der Seitenlänge 1 m hat den Flächeninhalt (kurz: „die Fläche“) 1 m^2.

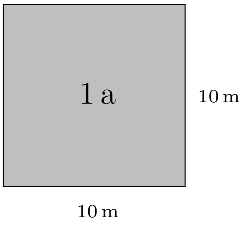


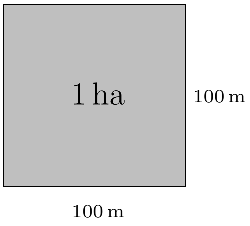
Ein Rechteck mit den Seitenlängen a und b hat die Fläche

$$\boxed{A = a \cdot b}$$

Ein Quadrat mit der Seitenlänge a hat die Fläche

$$\boxed{A = a^2}$$





$$
\begin{aligned}
1\,\mathrm{a} &= 1\,\mathrm{Ar} = 100\,\mathrm{m}^2\\
1\,\mathrm{ha} &= 1\,\mathrm{Hektar} = 100\,\mathrm{a} = 10\,000\,\mathrm{m}^2\\
1\,\mathrm{km}^2 &= 100\,\mathrm{ha} = 10\,000\,\mathrm{a} = 10^6\,\mathrm{m}^2\\
1\,\mathrm{m}^2 &= 100\,\mathrm{dm}^2 = 10\,000\,\mathrm{cm}^2 = 10^6\,\mathrm{mm}^2\\
1\,\mathrm{dm}^2 &= 100\,\mathrm{cm}^2 = 10\,000\,\mathrm{mm}^2\\
1\,\mathrm{cm}^2 &= 100\,\mathrm{mm}^2\\
1\,\mathrm{mm}^2 &= (1000\,\mu)^2 = 10^6\,\mu^2\\
1\,\mu^2 &= (1000\,\mathrm{nm})^2 = 10^6\,\mathrm{nm}^2\\
1\,\mathrm{nm}^2 &= (1000\,\mathrm{pm})^2 = 10^6\,\mathrm{pm}^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
1{,}23456789\,\mathrm{km}^2 &= 1\,\mathrm{km}^2\,23\,\mathrm{ha}\,45\,\mathrm{a}\,67\,\mathrm{m}^2\,89\,\mathrm{dm}^2\\
123{,}456789\,\mathrm{m}^2 &= 1\,\mathrm{a}\,23\,\mathrm{m}^2\,45\,\mathrm{dm}^2\,67\,\mathrm{cm}^2\,89\,\mathrm{mm}^2\\
0{,}123456789\,\mathrm{m}^2 &= 12\,\mathrm{dm}^2\,34\,\mathrm{cm}^2\,56\,\mathrm{mm}^2\,789000\,\mu^2\\
0{,}0123456789\,\mathrm{cm}^2 &= 1\,\mathrm{mm}^2\,234567\,\mu^2\,890000\,\mathrm{nm}^2
\end{aligned}
$$

$$0,\underbrace{12}_{\mathrm{ha}}\,\underbrace{34}_{\mathrm{a}}\,\underbrace{56}_{\mathrm{m}^2}\,\underbrace{78}_{\mathrm{dm}^2}\,\underbrace{90}_{\mathrm{cm}^2}\,\underbrace{12}_{\mathrm{mm}^2}\ \mathrm{km}^2$$

$$0,\underbrace{123456}_{\mu^2}\underbrace{789123}_{\mathrm{nm}^2}\underbrace{456789}_{\mathrm{pm}^2}\ \mathrm{mm}^2$$

Grundwissen Mathematik – Jahrgangsstufe 6

Zahlen

Definitionen und Regeln | **Beispiele**

Brüche und Bruchteile

Teilt man die Zahl b in a gleich große Teile, dann hat ein Teil die Größe $a : b$. Diesen Quotienten schreibt man auch in Form eines Bruches:

$$\boxed{\frac{a}{b} = a : b}$$

$$\boxed{\frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}} = \text{Wert des Bruches}}$$

$$\frac{a}{b} = a : b = (a \cdot 1) : b = a \cdot (1 : b) = a \cdot \frac{1}{b}$$

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{1}{b} \cdot a = \frac{1}{b} \text{ von } a}$$

$$\frac{a}{b} \text{ von } c = a \cdot \frac{1}{b} \text{ von } c = a \cdot c : b = (a \cdot c) : b = \frac{a \cdot c}{b}$$

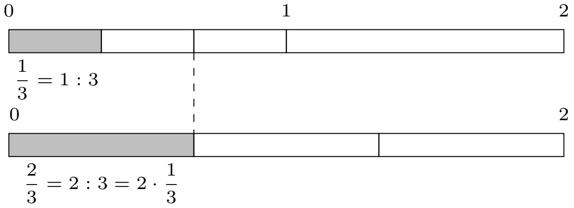
$$\boxed{\frac{a}{b} \text{ von } c = \frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}}$$

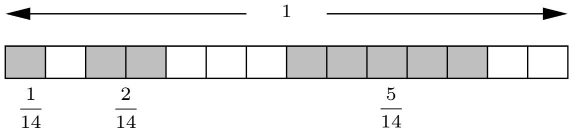
Da man durch null nicht teilen darf, darf auch der Nenner eines Bruches niemals null sein!

$$\boxed{\frac{a}{a} = 1, \qquad \frac{a}{1} = a, \qquad \frac{0}{a} = 0}$$

Wird das Ganze in b gleiche Teile zerlegt, dann bilden a dieser Teile den Bruchteil $\frac{a}{b}$ vom Ganzen (das $\frac{a}{b}$-fache des Ganzen).

$$1 : 3 = \frac{1}{3}, \qquad 5 : 7 = \frac{5}{7}, \qquad \frac{18}{6} = 18 : 6 = 3$$





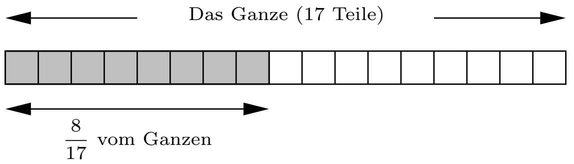
$$\frac{2}{14} = 2 \cdot \frac{1}{14}, \qquad \frac{5}{14} = 5 \cdot \frac{1}{14}$$

$$\frac{3}{7} \text{ von } 28 = 3 \cdot \frac{1}{7} \text{ von } 28 = 3 \cdot \frac{28}{7} = 3 \cdot 4 = 12$$

$$\frac{3}{7} \text{ von } 8 = \frac{3 \cdot 8}{7} = \frac{24}{7}$$

$$\frac{3}{10} \text{ von } 1{,}5\,\text{m} = \frac{3 \cdot 150\,\text{cm}}{10} = \frac{450\,\text{cm}}{10} = 45\,\text{cm}$$

$$\frac{7}{7} = 1, \qquad \frac{8}{1} = 8, \qquad \frac{0}{13} = 0$$



Die Menge der rationalen Zahlen

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ (natürliche Zahlen)

$\mathbb{Z} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ (ganze Zahlen)

Mit $\mathbb{Q}$ bezeichnet man die Menge aller Brüche, wobei die Zähler eine beliebige ganze Zahl und die Nenner eine ganze Zahl außer null sein dürfen:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z} \text{ und } b \in \mathbb{Z} \text{ und } b \neq 0 \right\}$$

$\mathbb{Q}$ heißt auch Menge der **rationalen Zahlen**.

$$\frac{0}{1} = 0, \qquad \frac{-3}{1} = -3, \qquad \frac{16}{-2} = -8, \qquad \frac{-12}{-4} = 3$$

Jede ganze Zahl z kan man als Bruch schreiben, z.B. $z = \frac{z}{1}$. Die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen ist also in der Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen enthalten ($\mathbb{Z}$ ist eine Teilmenge von $\mathbb{Q}$):

$$\mathbb{N} \subsetneqq \mathbb{Z} \subsetneqq \mathbb{Q}$$

Definitionen und Regeln | **Beispiele**

Erweitern und Vergleichen

Ein Bruch ändert seinen Wert nicht, wenn Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl multipliziert werden (*Erweitern*):

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}}$$

Zwei Brüche heißen *gleichnamig*, wenn sie den gleichen Nenner besitzen. Zwei Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ kann man durch geschicktes Erweitern immer gleichnamig machen:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d}, \quad \frac{c}{d} = \frac{c \cdot b}{b \cdot d}$$

$b \cdot d$ ist ein *gemeinsamer Nenner* der Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ (ein gemeinsames Vielfaches der Nenner b und d).

> Der *kleinste gemeinsame Nenner (Hauptnenner, HN)* von mehreren Brüchen ist das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) ihrer Nennern.

$$\frac{3}{7} = \frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 5} = \frac{15}{35} = \frac{3 \cdot (-7)}{7 \cdot (-7)} = \frac{-21}{-49}$$

Um den Bruch $\frac{5}{12}$ auf den Nenner 108 zu bringen, muss er mit $108 : 12 = 9$ erweitert werden:

$$\frac{5}{12} = \frac{5 \cdot 9}{12 \cdot 9} = \frac{45}{108}$$

Gleichnamigmachen von $\frac{3}{7}$ und $\frac{4}{11}$:

$$\frac{3}{7} = \frac{3 \cdot 11}{7 \cdot 11} = \frac{33}{77}, \quad \frac{4}{11} = \frac{4 \cdot 7}{11 \cdot 7} = \frac{28}{77}$$

Gleichnamigmachen von $\frac{19}{36}$, $\frac{13}{24}$ und $\frac{29}{54}$:

$$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3,\ 24 = \boxed{2 \cdot 2 \cdot 2} \cdot 3,\ 54 = 2 \cdot \boxed{3 \cdot 3 \cdot 3}$$

$$\text{HN} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 216$$

Die Erweiterungsfaktoren findet man am schnellsten, wenn man aus der Primfaktorzerlegung des Hauptnenners die Primfaktoren des jeweiligen Nenners streicht.

$$\frac{19}{36} = \frac{19 \cdot 6}{36 \cdot 6} = \frac{114}{216}, \quad \frac{13}{24} = \frac{13 \cdot 9}{24 \cdot 9} = \frac{117}{216}$$

$$\frac{29}{54} = \frac{29 \cdot 4}{54 \cdot 4} = \frac{116}{216}$$

In diesem Teil über das Vergleichen von Brüchen sind alle Zähler und Nenner positiv!
Für gleichnamige Brüche gilt:

$$\boxed{\frac{a}{b} < \frac{c}{b} \iff a < c}$$

Wenn man 5 kg Zucker auf 7 Kinder verteilt erhält jedes Kind weniger als wenn man 5 kg Zucker auf 6 Kinder verteilt, d.h. $\frac{5}{7} < \frac{5}{6}$.

Für Brüche mit gleichem Zähler gilt:

$$\boxed{\frac{a}{b} < \frac{a}{c} \iff b > c}$$

$$\frac{7}{13} < \frac{9}{13}, \text{ weil } 7 < 9, \qquad \frac{11}{17} > \frac{11}{19}, \text{ weil } 17 < 19$$

Nichtgleichnamige Brüche vergleicht man, indem man sie gleichnamig macht oder auf den gleichen Zähler bringt (je nachdem, was einfacher ist):

$$\underbrace{\frac{19}{36}}_{\frac{114}{216}} < \underbrace{\frac{29}{54}}_{\frac{116}{216}} < \underbrace{\frac{13}{24}}_{\frac{117}{216}}, \text{ weil } 114 < 116 < 117$$

$$\underbrace{\frac{12}{37}}_{\frac{24}{74}} < \underbrace{\frac{8}{23}}_{\frac{24}{69}} < \underbrace{\frac{6}{17}}_{\frac{24}{68}}, \text{ weil } 74 > 69 > 68$$

Kürzen

Ein Bruch ändert seinen Wert nicht, wenn man Zähler und Nenner durch die gleiche Zahl dividiert (*Kürzen*):

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}}$$

Zum Kürzen zerlegt man den Zähler und den Nenner in Primfaktoren und streicht die gemeinsamen Faktoren.

$$\frac{48}{56} = \frac{48 : 8}{56 : 8} = \frac{6}{7}$$

$$\frac{84}{112} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{24}{72} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{182}{1001} = \frac{2 \cdot 7 \cdot 13}{7 \cdot 11 \cdot 13} = \frac{2}{11}$$

Definitionen und Regeln	**Beispiele**
Ein Bruch heißt *vollständig gekürzt*, wenn Zähler und Nenner keinen gemeinsamen Primfaktor mehr enthalten. Die vollständig gekürzte Version eines Bruches ist seine *Grundform*. Gelingt die Primfaktorenzerlegung nicht, dann bestimmt man den ggT aus Zähler und Nenner mit der Kettendivision: $\boxed{\dfrac{a}{b} = \underbrace{\dfrac{a : \mathrm{ggT}(a,b)}{b : \mathrm{ggT}(a,b)}}_{\text{vollst. gekürzt}}}$	Produkte im Zähler und im Nenner vor dem Kürzen auf keinen Fall ausmultiplizieren, sondern gleich weiter zerlegen: $\dfrac{34 \cdot 36}{54 \cdot 51} = \dfrac{2 \cdot 17 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 17} = \dfrac{4}{9}$ Die Primfaktoren des Zählers und Nenners von $\frac{5063}{5893}$ sind nicht leicht zu finden: $5893 : 5063 = 1\,\mathrm{R}\,830$ $5063 : 830 = 6\,\mathrm{R}\,83$ $830 : \boxed{83} = 10\,\mathrm{R}\,\boxed{0} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{ggT}(5893, 5063) = 83$ $\dfrac{5063}{5893} = \dfrac{5063 : 83}{5893 : 83} = \dfrac{61}{71}$ Nebenbei hat man auch die Primfaktoren von Zähler und Nenner gefunden: $5063 = 61 \cdot 83, \qquad 5893 = 71 \cdot 83$
Rechnen mit Brüchen Gleichnamige Brüche, Addition und Subtraktion: $\boxed{\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{b} = \dfrac{a+c}{b}} \quad \boxed{\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{b} = \dfrac{a-c}{b}}$ Ungleichnamige Brüche müssen vor dem Addieren bzw. Subtrahieren gleichnamig gemacht werden! Wenn man den HN nicht findet, nimmt man das Produkt der Nenner als gemeinsamen Nenner: $\boxed{\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}}$	$\dfrac{3}{8} + \dfrac{4}{8} = \dfrac{3+4}{8} = \dfrac{7}{8}$ $\dfrac{3}{11} - \dfrac{7}{11} = \dfrac{3-7}{11} = \dfrac{-4}{11} = -\dfrac{4}{11}$ $\dfrac{5}{6} - \dfrac{11}{15} = \dfrac{5 \cdot 5 - 11 \cdot 2}{30} = \dfrac{3}{30} = \dfrac{1}{10}$ $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{3-2}{6} = \dfrac{1}{6}, \quad \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{7} = \dfrac{7-8}{56} = -\dfrac{1}{56}$ $\dfrac{11}{24} - \dfrac{11}{16} + \dfrac{13}{36} = \dfrac{11 \cdot 6 - 11 \cdot 9 + 13 \cdot 4}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} = \dfrac{19}{144}$ $\dfrac{3}{8} + \dfrac{2}{7} = \dfrac{3 \cdot 7 + 2 \cdot 8}{8 \cdot 7} = \dfrac{37}{56}$
Oft ist es vorteilhaft, vor dem Addieren bzw. Subtrahieren zu kürzen. Wenn die Nenner schon fast gleichnamig sind, ist es besser, nicht zu kürzen.	$\dfrac{28}{42} - \dfrac{9}{18} = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{4-3}{6} = \dfrac{1}{6}$ $\dfrac{49}{56} + \dfrac{24}{112} = \dfrac{49 \cdot 2 + 24}{112} = \dfrac{122}{112} = \dfrac{61}{56}$
Multiplikation von Brüchen: $\boxed{\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \cdot c}{b \cdot d}} \quad \boxed{\dfrac{a}{b} \cdot c = \dfrac{a \cdot c}{b}}$ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{a}{b} = \dfrac{a \cdot a}{b \cdot b} = \dfrac{a^2}{b^2}$ $\boxed{\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}}$	$\dfrac{3}{28} \cdot 7 = \dfrac{3 \cdot 7}{28} = \dfrac{3}{4}$ $\dfrac{3}{8} \cdot \dfrac{11}{5} = \dfrac{3 \cdot 11}{8 \cdot 5} = \dfrac{33}{40}$ $\dfrac{16}{121} \cdot \dfrac{33}{24} = \dfrac{16 \cdot 33}{121 \cdot 24} = \dfrac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11}{11 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} = \dfrac{2}{11}$ $\left(\dfrac{2}{3}\right)^4 = \dfrac{2^4}{3^4} = \dfrac{16}{81}$ $\left(-\dfrac{3}{5}\right)^3 = -\dfrac{3^3}{5^3} = -\dfrac{27}{125}$

Definitionen und Regeln | **Beispiele**

$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1 \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\frac{b}{a}=1:\frac{a}{b}}$

$\frac{b}{a}$ heißt *Kehrwert* von $\frac{a}{b}$.

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\left(1:\frac{c}{d}\right)=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

Durch einen Bruch wird dividiert, indem man mit seinem Kehrwert multipliziert:

$$\boxed{\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}} \qquad \boxed{\frac{a}{b}:c=\frac{a}{b\cdot c}}$$

$\frac{3}{8}$ ist der Kehrwert von $\frac{8}{3}$.

$\frac{1}{7}$ ist der Kehrwert von 7.

5 ist der Kehrwert von $\frac{1}{5}$.

$$\frac{11}{8}:\frac{7}{3}=\frac{11}{8}\cdot\frac{3}{7}=\frac{33}{56}, \qquad \frac{24}{7}:6=\frac{24}{7\cdot 6}=\frac{4}{7}$$

$$\frac{35}{52}:\frac{77}{78}=\frac{35}{52}\cdot\frac{78}{77}=\frac{5\cdot 7\cdot 2\cdot 3\cdot 13}{2\cdot 2\cdot 13\cdot 7\cdot 11}=\frac{15}{22}$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right):\frac{1}{9}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{1}=-\frac{9}{3}=-3$$

Einteilung der positiven Brüche

Stammbrüche:	Zähler = 1
Echte Brüche:	Zähler < Nenner
Unechte Brüche:	Zähler > Nenner
Scheinbrüche:	Zähler = $n\cdot$ Nenner mit $n\in\mathbb{N}$

Stammbrüche sind echte Brüche.
Echte Brüche sind kleiner als 1.
Unechte Brüche sind größer als 1.
Scheinbrüche sind natürliche Zahlen.

Stammbrüche:	$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\ldots$
echte Brüche:	$\frac{1}{2},\frac{7}{8},\frac{13}{444},\frac{12}{50},\ldots$
unechte Brüche:	$\frac{3}{2},\frac{9}{8},\frac{133}{44},\frac{73}{50},\ldots$
Scheinbrüche:	$\frac{3}{3}=1,\ \frac{9}{3}=3,\ \frac{56}{7}=8,\ \frac{1000}{50}=20$

Gemischte Zahlen

Um die Größe eines unechten Bruches besser zu erkennen, schreibt man ihn als *gemischte Zahl*. Die gemischte Zahl $a\,\frac{b}{c}$ ist eine Abkürzung für die Summe $a+\frac{b}{c}$.

$$\boxed{a\,\frac{b}{c}=a+\frac{b}{c}=\frac{a\cdot c}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a\cdot c+b}{c}}$$

$$\boxed{z:n=g\,\mathrm{R}\,r \quad\Longrightarrow\quad \frac{z}{n}=g\,\frac{r}{n}}$$

Beim Addieren und Subtrahieren gemischter Zahlen werden die Ganzen und die Bruchteile getrennt berechnet.

Vorsicht: $-a\,\frac{b}{c}$ ist **nicht** $-a+\frac{b}{c}$, sondern

$$\boxed{-a\,\frac{b}{c}=-\left(a+\frac{b}{c}\right)=-\frac{a\cdot c+b}{c}=-a-\frac{b}{c}}$$

Zum Multiplizieren und Dividieren verwandelt man gemischte Zahlen in unechte Brüche.

$$5\,\frac{3}{7}=5+\frac{3}{7}=\frac{5\cdot 7+3}{7}=\frac{38}{7}$$

$\frac{68}{9}$ soll als gemischte Zahl geschrieben werden:

$$68:9=7\,\mathrm{R}\,5 \quad\Longrightarrow\quad 68=7\cdot 9+5 \quad\Longrightarrow$$

$$\frac{68}{9}=\frac{7\cdot 9+5}{9}=\frac{7\cdot 9}{9}+\frac{5}{9}=7+\frac{5}{9}=7\,\frac{5}{9}$$

$$5\,\frac{2}{3}+6\,\frac{4}{5}=(5+6)+\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{5}\right)=11\,\frac{22}{15}=12\,\frac{7}{15}$$

$$8\,\frac{4}{5}-6\,\frac{3}{4}=(8-6)+\left(\frac{4}{5}-\frac{3}{4}\right)=2\,\frac{16-15}{20}=2\,\frac{1}{20}$$

Beachte bei dem folgenden Beispiel den Trick

$$8\,\frac{4}{20}=7+1+\frac{4}{20}=7+\frac{20}{20}+\frac{4}{20}=7\,\frac{24}{20}:$$

$$8\,\frac{1}{5}-4\,\frac{3}{4}=8\,\frac{4}{20}-4\,\frac{15}{20}=7\,\frac{24}{20}-4\,\frac{15}{20}=3\,\frac{9}{20}$$

$$4\,\frac{2}{7}:1\,\frac{17}{28}=\frac{30}{7}:\frac{45}{28}=\frac{30\cdot 28}{7\cdot 45}=\frac{8}{3}=2\,\frac{2}{3}$$

Definitionen und Regeln	**Beispiele**
Doppelbrüche Bei Doppelbrüchen schreibt man den Hauptbruchstrich auf Höhe des Gleichheitszeichens. Hauptbruchstrich $\longrightarrow \dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$ Die Zähler der Teilbrüche bleiben auf der gleichen Seite des Hauptbruchstrichs, die Nenner der Teilbrüche springen über den Hauptbruchstrich.	$\dfrac{\frac{3}{8} \cdot \frac{4}{7}}{\frac{5}{21} \cdot \frac{9}{16}} = \dfrac{3 \cdot 4 \cdot 21 \cdot 16}{8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 9} = \dfrac{8}{5} = 1{,}6$ $\dfrac{\frac{3}{4} - \frac{5}{6}}{\frac{7}{3} : \frac{49}{8}} = \dfrac{\frac{9-10}{12}}{\frac{7 \cdot 8}{49 \cdot 3}} = \dfrac{-\frac{1}{12}}{\frac{8}{7 \cdot 3}} = -\dfrac{7 \cdot 3}{12 \cdot 8} = -\dfrac{7}{32}$
Dezimalbrüche **Definition der Dezimalbrüche** Das Komma in einem Dezimalbruch trennt die Einerstelle von der Zehntelstelle. $23{,}456 = 2 \cdot 10 + 3 \cdot 1 + \frac{4}{10} + \frac{5}{100} + \frac{6}{1000} =$ $= 23\,\frac{456}{1000} = \frac{23456}{1000} = 23\,\frac{57}{125} = \frac{2932}{125}$ Schlussnullen nach dem Komma darf man bei einem Dezimalbruch beliebig anhängen oder streichen (Erweitern oder Kürzen).	$0{,}1 = \frac{1}{10}, \quad 0{,}01 = \frac{1}{100}, \quad 0{,}001 = \frac{1}{1000}$ $0{,}2 = \frac{1}{5}, \quad 0{,}5 = \frac{1}{2}, \quad 0{,}25 = \frac{1}{4} \quad 0{,}125 = \frac{1}{8}$ $0{,}75 = \frac{3}{4}, \quad 1{,}5 = \frac{3}{2} = 1\,\frac{1}{2}, \quad 1{,}25 = \frac{5}{4} = 1\,\frac{1}{4}$ $0{,}123 = \frac{123}{1000}, \quad 10{,}0001 = \frac{100001}{10000}$ $0{,}1230000 = \frac{1230000}{10000000} = \frac{123}{1000} = 0{,}123$
Rechnen mit Dezimalbrüchen Zum Addieren und Subtrahieren werden Dezimalbrüche durch das Anhängen von Schlussnullen gleichnamig gemacht. Dezimalbruch $\cdot\ 10^n$: Komma um n Stellen nach rechts Dezimalbruch : 10^n : Komma um n Stellen nach links Multiplikation zweier Dezimalbrüche mit d_1 und d_2 Dezimalen: • Beide Kommas weglassen • Multiplizieren • Komma so setzen, dass das Ergebnis $d_1 + d_2$ Dezimalen hat	$1{,}2345 + 2{,}3 = 1{,}2345 + 2{,}3000 = 3{,}5345$ $1 - 0{,}987 = 1{,}000 - 0{,}987 = 0{,}013$ $1{,}2345 \cdot 1000 = 1234{,}5$ $1{,}2345 : 1000 = 0{,}0012345$ $0{,}000123 \cdot 10^7 = 1230$ $123{,}45 : 10^6 = 0{,}00012345$ $0{,}006 \cdot 2{,}23 = 6 \cdot 223 : 100000 = 1338 : 100000 =$ $= 0{,}01338$ $3{,}64 \cdot 2{,}5 = 364 \cdot 25 : 1000 = 9100 : 1000 =$ $= 9{,}100 = 9{,}1$ $0{,}0007 \cdot 0{,}003 = 7 \cdot 3 : 10^7 = 21 : 10^7 =$ $= 0{,}0000021$

Definitionen und Regeln | **Beispiele**

Zur Division zweier Dezimalbrüche verschiebt man das Komma beim Dividenden **und** beim Divisor um die gleiche Stellenzahl soweit nach rechts, bis der Divisor ganzzahlig ist.

$$6{,}4 : 0{,}128 = \frac{6{,}4}{0{,}128} = \frac{6{,}4 \cdot 1000}{0{,}128 \cdot 1000} = \frac{6400}{128} = 6400 : 128 = 50$$

$12{,}5 : 0{,}0005 = 125000 : 5 = 25000$

$1{,}001 : 0{,}13 = 100{,}1 : 13 = 7{,}7$

Endliche und periodische Dezimalbrüche

Jeder Dezimalbruch mit n Dezimalen (Stellen nach dem Komma) lässt sich als Bruch mit dem Nenner $10^n = 2^n \cdot 5^n$ schreiben. Die Grundform (vollständig gekürzte Form) dieses Bruches hat im Nenner nur die Primfaktoren 2 und 5.
Ein vollständig gekürzter Bruch, dessen Nenner andere Primfaktoren als 2 oder 5 enthält, ist *periodisch unendlich* oder kurz *periodisch*. Die Länge der Periode ist kleiner als der Nenner.

Ein periodischer Dezimalbruch heißt *reinperiodisch*, wenn die Periode direkt nach dem Komma beginnt.

Ein periodischer Dezimalbruch heißt *gemischtperiodisch*, wenn zwischen Komma und Periode noch weitere Ziffern stehen.

Einen Bruch verwandelt man in einen Dezimalbruch durch Erweitern auf eine Zehnerpotenz im Nenner oder einfach durch schriftliches Dividieren:

$$\frac{17}{25} = \frac{17 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{68}{100} = 0{,}68$$

In folgender Tabelle bedeutet PFN „Primfaktoren des Nenners“, e „endlich“, rp „rein periodisch“, gp „gemischt periodisch“ und p die Periodenlänge.

Bruch	PFN	Typ	p
$\frac{1}{250} = 0{,}004$	2, 5	e	0
$\frac{1}{3} = 0{,}\overline{3}$	3	rp	1
$\frac{1}{7} = 0{,}\overline{142857}$	7	rp	6
$\frac{1}{33} = 0{,}\overline{03}$	3, 11	rp	2
$\frac{1}{30} = 0{,}0\overline{3}$	3, 2, 5	gp	2
$\frac{1}{6} = 0{,}1\overline{6}$	2, 3	gp	1
$\frac{611}{4950} = 0{,}12\overline{34}$	2, 3, 5, 11	gp	2

$0{,}\overline{12} = 0{,}121212...$

$0{,}1\overline{2} = 0{,}122222...$

$0{,}120\overline{034} = 0{,}120034034034...$

Reinperiodischer Dezimalbruch in Bruch:

$$\boxed{0{,}\underbrace{\overline{\text{Periode}}}_{\text{Länge } p} = \frac{\text{Periode}}{\underbrace{999...9}_{p \text{ mal die } 9}}}$$

Gemischtperiodischer Dezimalbruch in Bruch:

Ist z die Zahl der Ziffern zwischen Komma und Periode, dann multipliziert man mit 10^z, erhält damit einen reinperiodischen Dezimalbruch, wandelt diesen in einen Bruch um und dividiert anschließend wieder durch 10^z.

Zum Rechnen verwandelt man periodische Dezimalbrüche zweckmäßigerweise in Brüche.

$$0{,}\overline{7} = \frac{7}{9}$$

$$0{,}\overline{69} = \frac{69}{99} = \frac{23}{33}$$

$$0{,}\overline{02439} = \frac{2439}{99999} = \frac{1}{41}$$

$$0{,}3\overline{7} = 3{,}\overline{7} : 10 = 3\,\frac{7}{9} : 10 = \frac{34}{9} : 10 = \frac{34}{90} = \frac{17}{45}$$

$$0{,}123\overline{456} = 123{,}\overline{456} : 1000 = 123\,\frac{456}{999} : 1000 = \frac{123333}{999} : 1000 = \frac{123333}{999000} = \frac{41111}{333000}$$

$$0{,}\overline{12} : 0{,}\overline{18} = \frac{12}{99} : \frac{18}{99} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

$$0{,}\overline{7} : 0{,}\overline{07} = \frac{7}{9} : \frac{7}{99} = \frac{99}{9} = 11$$

Definitionen und Regeln | **Beispiele**

Prozentrechnung

Brüche in der Prozentschreibweise

Ein Hundertstel nennt man auch ein Prozent, in Zeichen 1 %.

$$\boxed{x\,\% = \frac{x}{100},\quad 1\,\% = \frac{1}{100},\quad 100\,\% = \frac{100}{100} = 1}$$

$$\boxed{x\% \text{ von } g = x\% \cdot g = \frac{x}{100} \cdot g = \frac{x \cdot g}{100}}$$

Jede Zahl a kann man in die Prozentschreibweise umwandeln:

$$\boxed{a = a \cdot 1 = a \cdot 100\,\% = (a \cdot 100)\,\%}$$

$$5\,\% = \frac{5}{100} = \frac{1}{20} = 0{,}05, \qquad 200\,\% = \frac{200}{100} = 2$$

$$\boxed{\begin{array}{llll} 2\,\% = \frac{1}{50}, & 4\,\% = \frac{1}{25}, & 5\,\% = \frac{1}{20}, & 10\,\% = \frac{1}{10} \\ 20\,\% = \frac{1}{5}, & 25\,\% = \frac{1}{4}, & 50\,\% = \frac{1}{2}, & 75\,\% = \frac{3}{4} \end{array}}$$

$$3\,\% \text{ von } 500 = \frac{3}{100} \cdot 500 = 15$$

$$12{,}3 = 12{,}3 \cdot 100\,\% = 1230\,\%$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot 100\,\% = \frac{100}{3}\,\% = 33\frac{1}{3}\,\%$$

$$0{,}\overline{7} = 0{,}\overline{7} \cdot 100\,\% = 77{,}\overline{7}\,\% = 77\frac{7}{9}\,\%$$

Grundaufgaben der Prozentrechnung

$$\boxed{\underbrace{\text{Prozentsatz}}_{x\,\%}\ \underbrace{\text{vom}}_{\text{mal}}\ \underbrace{\text{Grundwert}}_{g} = \underbrace{\text{Prozentwert}}_{w}}$$

$$\boxed{x\,\% \cdot g = w}$$

Prozentsatz gesucht:

$$\boxed{x\,\% = \frac{w}{g} = \frac{w}{g} \cdot 100\,\%}$$

Grundwert gesucht:

$$\boxed{g = \frac{w}{x\,\%} = \frac{w \cdot 100}{x}}$$

Zu a werden $x\,\%$ von a addiert (a wird um $x\,\%$ vergrößert):

$$\boxed{a + x\,\% \cdot a = a \cdot (1 + x\,\%) = a \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right)}$$

Von a werden $x\,\%$ von a subtrahiert (a wird um $x\,\%$ verkleinert):

$$\boxed{a - x\,\% \cdot a = a \cdot (1 - x\,\%) = a \cdot \left(1 - \frac{x}{100}\right)}$$

Ein Betrag a wird bei einer Bank einbezahlt und jährlich mit $x\%$ verzinst. Nach n Jahren ist der Wert des Kapitals

$$\boxed{x = a \cdot (1 + x\%)^n}$$

Grundwert: 240, Prozentsatz: 5% $\Longrightarrow$

Prozentwert: $w = 5\% \cdot 240 = \dfrac{5 \cdot 240}{100} = 12$

Wieviel Prozent von 180 sind 30?

$$x\% \cdot 180 = 30 \quad \Longrightarrow$$

$$x\% == \frac{30}{180} = \frac{30}{180} \cdot \underbrace{100\%}_{1} = 16\frac{2}{3}\,\%$$

15 Prozent eines Betrages sind 42€. Betrag?

$$15\% \cdot x = 42\,\text{€}$$

$$x = \frac{42\,\text{€}}{15\%} = \frac{42\,\text{€}}{\frac{15}{100}} = \frac{4200\,\text{€}}{15} = 280\,\text{€}$$

Preis mit 16% MWSt ist 52,2€. Preis ohne MWSt?

$$x \cdot (1 + 16\%) = x \cdot 1{,}16 = 52{,}2\,\text{€}$$

$$x = \frac{52{,}2\,\text{€}}{1{,}16} = 45\,\text{€}$$

Ein Flugzeug verliert 30% seiner Höhe und fliegt danach noch 1540 m hoch. Ursprüngliche Höhe?

$$x \cdot (1 - 30\%) = x \cdot 0{,}7 = 1540\,\text{m}$$

$$x = \frac{1540\,\text{m}}{0{,}7} = 2200\,\text{m}$$

Ein Betrag x wächst bei 5%-iger Verzinsung in drei Jahren auf 4630,50 €an.

$$x \cdot (1 + 5\%)^3 = x \cdot 1{,}05^3 = 4630{,}5\,\text{€}$$

$$x = \frac{4630{,}5\,\text{€}}{1{,}05^3} = \frac{4630{,}5\,\text{€}}{1{,}157625} = 4000\,\text{€}$$

Definitionen und Regeln | **Beispiele**

Relative Häufigkeit

Ein Experiment mit verschiedenen möglichen Ergebnissen (z.B. das Werfen eines Würfels) nennt man ein *Zufallsexperiment*. Wird ein Zufallsexperiment n-mal ausgeführt und tritt ein bestimmtes Ergebnis dabei z-mal ein (Trefferzahl), dann nennt man den Quotienten $\frac{z}{n}$ die *relative Häufigkeit* für das Auftreten des Ergebnisses:

$$\text{relative Häufigkeit} = \frac{\text{Zahl der Treffer}}{\text{Gesamtzahl der Versuche}}$$

Ein Würfel wird 200-mal geworfen. In folgender Tabelle bedeuten T die Trefferzahl und rH die relative Häufigkeit:

	1	2	3	4	5	6
T	31	37	33	38	29	32
rH	0,155	0,185	0,165	0,19	0,145	0,16
rH	15,5%	18,5%	16,5%	19%	14,5%	16%

Geometrie

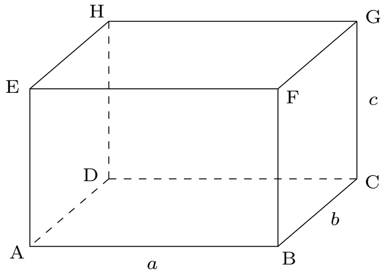
Definitionen und Regeln | **Beispiele**

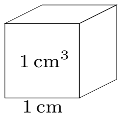
Der Quader

Ein Quader wird von sechs Rechtecken begrenzt.
Ein Quader hat acht Ecken (A, B, C, ...), zwölf Kanten ([AB], [BC], [CD], ...) und sechs Flächen.
Je zwei gegenüberliegende Rechtecke des Quaders sind gleich.
Je vier Kanten des Quaders sind gleich lang:

$$a = \overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{CD}} = \overline{\mathrm{EF}} = \overline{\mathrm{GH}}$$
$$b = \overline{\mathrm{BC}} = \overline{\mathrm{DE}} = \overline{\mathrm{FG}} = \overline{\mathrm{HE}}$$
$$c = \overline{\mathrm{AE}} = \overline{\mathrm{BF}} = \overline{\mathrm{CG}} = \overline{\mathrm{DH}}$$

Ein Quader mit lauter gleich langen Kanten heißt *Würfel*.
Ein Würfel wird von sechs gleichen Quadraten begrenzt.

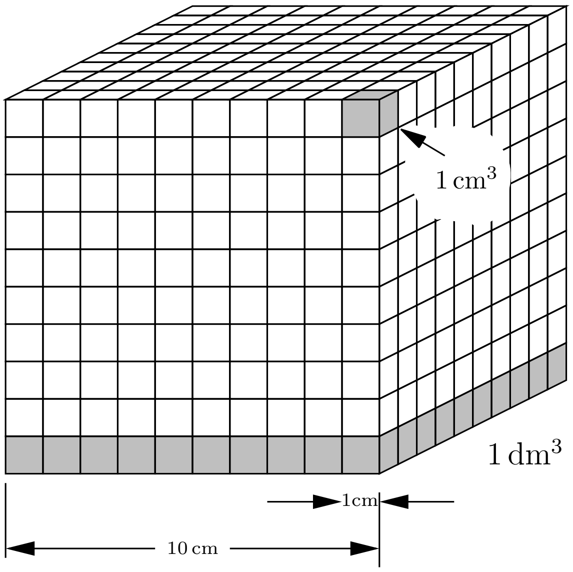




Raummaße

Der Rauminhalt (das Volumen) eines Würfels mit der Kantenlänge 1 cm ist ein *Kubikzentimeter* (cm³).
Ein Würfel mit der Kantenlänge 10 cm besteht aus $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ Würfeln mit 1 cm Kantenlänge, d.h. $1\,\mathrm{dm}^3 = 1000\,\mathrm{cm}^3$.

$$\begin{aligned}
1\,\mathrm{km}^3 &= (1000\,\mathrm{m})^3 = 10^9\,\mathrm{m}^3\\
1\,\mathrm{m}^3 &= 1000\,\mathrm{dm}^3 = 10^6\,\mathrm{cm}^3 = 10^9\,\mathrm{mm}^3\\
1\,\mathrm{dm}^3 &= 1000\,\mathrm{cm}^3 = 10^6\,\mathrm{mm}^3\\
1\,\mathrm{cm}^3 &= 1000\,\mathrm{mm}^3\\
1\,\mathrm{mm}^3 &= (1000\,\mu)^3 = 10^9\,\mu^3\\
1\,\mu^3 &= (1000\,\mathrm{nm})^3 = 10^9\,\mathrm{nm}^3\\
1\,\mathrm{nm}^3 &= (1000\,\mathrm{pm})^3 = 10^9\,\mathrm{pm}^3
\end{aligned}$$



Definitionen und Regeln

Einer Stelle bei den Längeneinheiten entsprechen zwei Stellen bei den Flächeneinheiten und drei Stellen bei den Volumeneinheiten.

$$\overbrace{\bullet\bullet\bullet}^{\text{km}}\overbrace{\bullet\bullet\bullet}^{\text{m}}\overbrace{\bullet}^{\text{dm}}\overbrace{\bullet}^{\text{cm}}\overbrace{\bullet}^{\text{mm}}\overbrace{\bullet\bullet\bullet}^{\mu}$$

$$\overbrace{\bullet\bullet}^{\text{ha}}\overbrace{\bullet\bullet}^{\text{a}}\overbrace{\bullet\bullet}^{\text{m}^2}\overbrace{\bullet\bullet}^{\text{dm}^2}\overbrace{\bullet\bullet}^{\text{cm}^2}\overbrace{\bullet\bullet}^{\text{mm}^2}\overbrace{\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet}^{\mu^2}$$

$$\overbrace{\bullet\bullet\bullet}^{\text{m}^3}\overbrace{\bullet\bullet\bullet}^{\text{dm}^3}\overbrace{\bullet\bullet\bullet}^{\text{cm}^3}\overbrace{\bullet\bullet\bullet}^{\text{mm}^3}\overbrace{\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet}^{\mu^3}$$

Beispiele

$$\overbrace{123}^{\text{m}^3},\overbrace{456}^{\text{dm}^3}\overbrace{789}^{\text{cm}^3}\overbrace{123}^{\text{mm}^3}\ \text{m}^3 = 123\,\text{m}^3\,456\,\text{dm}^3\,789\,\text{cm}^3\,123\,\text{mm}^3 =$$
$$= 123456{,}789123\,\text{dm}^3 =$$
$$= 123456789{,}123\,\text{cm}^3 =$$
$$= 123456789123\,\text{mm}^3$$

$0{,}0800031\,\text{m}^3 = 80\,\text{dm}^3\,3\,\text{cm}^3\,100\,\text{mm}^3$

$0{,}000\,307\,\text{mm}^3 = 307\,000\,\mu^3$

1 Liter	=	1 l	=	1 dm^3
1 Hektoliter	=	1 hl	=	100 dm^3
1 Milliliter	=	1 ml	=	1 cm^3
1 Zentiliter	=	1 cl	=	10 cm^3

1 m^3	=	1000 l	=	10 hl
1 l	=	100 cl	=	1000 ml
1 cl	=	10 ml	=	10 cm^3
1 ml	=	1 cm^3	=	1000 mm^3

Volumen und Oberfläche des Quaders

Ein Quader mit den Kantenlängen a, b und c hat das Volumen

$$\boxed{V = a \cdot b \cdot c}$$

die Oberfläche

$$\boxed{A = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)}$$

und die Gesamtkantenlänge

$$\boxed{k = 4 \cdot (a + b + c)}$$

Ein Würfel mit der Kantenlänge a hat das Volumen

$$\boxed{V = a^3}$$

die Oberfläche

$$\boxed{A = 6 \cdot a^2}$$

und die Gesamtkantenlänge

$$\boxed{k = 12 \cdot a}$$

Ein Quader mit den Kantenlängen $a = 3\,\text{m}$, $b = 7\,\text{cm}$ und $c = 2\,\text{mm}$ hat das Volumen

$V = 3000\,\text{mm}\cdot 70\,\text{mm}\cdot 2\,\text{mm} = 420\,000\,\text{mm}^3 = 420\,\text{cm}^3$,

die Oberfläche

$$A = 2 \cdot (3000\,\text{mm} \cdot 70\,\text{mm} + 3000\,\text{mm} \cdot 2\,\text{mm} +$$
$$+ 70\,\text{mm} \cdot 2\,\text{mm}) =$$
$$= 432\,280\,\text{mm}^2 = 43\,\text{dm}^2\,22\,\text{cm}^2\,80\,\text{mm}^2\,,$$

und die Gesamtkantenlänge

$$k = 4 \cdot (3000\,\text{mm} + 70\,\text{mm} + 2\,\text{mm}) =$$
$$= 12\,288\,\text{mm} = 12\,\text{m}\,2\,\text{dm}\,8\,\text{cm}\,8\,\text{mm}.$$

Ein Würfel hat das Volumen $74\,088\,\text{cm}^3$, wie lang sind seine Kanten?

Primfaktorenzerlegung von 74 088:

$V = a^3 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^3\,\text{cm}^3 = (2 \cdot 3 \cdot 7\,\text{cm})^3 = (42\,\text{cm})^3$

$\Longrightarrow \quad a = 42\,\text{cm}$

Grundwissen Mathematik – Jahrgangsstufe 7

Algebra

Definitionen und Regeln | **Beispiele**

Terme

Ein *Term* ist ein Rechenausdruck. Ein Term besteht aus Zahlen, Rechenzeichen und gegebenenfalls aus Benennungen. Einen Term berechnen heißt, ihn soweit zu vereinfachen, bis nur noch eine Zahl übrig bleibt; diese Zahl ist der *Wert des Terms*. Die letzte Rechenoperation bei der Berechnung eines Terms git dem Term seinen Namen (Summe, Differenz, Produkt, Qoutient oder Potenz).
Einem Term gibt man oft einen Kurznamen, der meistens aus nur einem Buchstaben besteht und möglichst aussagekräftig ist, z.B. V für ein Volumen.

$T = 2^3 - 3^2 = 8 - 9 = -1$
T ist eine Differenz, deren Minuend und Subtrahend jeweils Potenzen sind.

$x = (7 - 2 \cdot 5) : (1 - 2^2) = (-3) : (-3) = 1$
x ist ein Quotient.

$a = (16 - 3 \cdot 7)^{(3^2-7)} = (-5)^2 = 25$
a ist eine Potenz.

V ist das Volumen eines Quaders mit den Kantenlängen 2 cm, 3 cm und 4 cm:

$$V = 2\,\mathrm{cm} \cdot 3\,\mathrm{cm} \cdot 4\,\mathrm{cm} = 24\,\mathrm{cm}^3$$

Variable

Eine *Variable* ist ein Platzhalter für eine Zahl, d.h. statt der Variablen kann man eine beliebige Zahl aus einer vorgegebenen *Grundmenge* G schreiben (das Wort *Variable* bedeutet *Veränderliche*). Kommt die gleiche Variable mehrmals in einem Term vor, muss sie jedes mal mit der gleichen Zahl belegt werden.
Einen Term mit dem Namen T, der die Variable x enthält, schreibt man so:

$$T(x) \text{ (man spricht „}T\text{ von }x\text{“).}$$

$T(3)$ bedeutet:

Ersetze jedes x im Term $T(x)$ durch 3.

Die Werte des Terms $T(x)$ stellt man übersichtlich in Form einer *Wertetabelle* dar: Ausgewählte x-Werte aus der Grundmenge G schreibt man in die erste Zeile und die entsprechenden Termwerte $T(x)$ in die zweite Zeile.
Ein Term $T(x)$ hat eine *Nullstelle* bei x_1, wenn $T(x_1) = 0$.
Den Malpunkt vor einer Variablen oder vor einer Klammer darf man weglassen:

$$3 \cdot x = 3x, \quad 5 \cdot (3 \cdot a - a \cdot b^2 \cdot y^3) = 5(3a - ab^2y^3)$$

$$\begin{aligned} T(x) &= x^2 - 3 \cdot x \\ T(2) &= 2^2 - 3 \cdot 2 = 4 - 6 = -2 \\ T(-2) &= (-2)^2 - 3 \cdot (-2) = 4 + 6 = 10 \\ T(0) &= 0^2 - 3 \cdot 0 = 0 - 0 = 0 \end{aligned}$$

Wertetabelle für $T(x)$:

x	-2	-1	0	1	2	3
$T(x)$	10	4	0	-2	-2	0

Wegen $T(0) = 0$ und $T(3) = 0$ hat T bei $x_1 = 0$ und bei $x_2 = 3$ Nullstellen.

$$\begin{aligned} f(a,b) &= a^3 - \frac{3b}{a} \\ f(2,1) &= 2^3 - \frac{3 \cdot 1}{2} = 8 - 1{,}5 = 6{,}5 \\ f(-2,5) &= (-2)^3 - \frac{3 \cdot 5}{-2} = -8 + 7{,}5 = -0{,}5 \\ f(1,0) &= 1^3 - \frac{3 \cdot 0}{1} = 1 \\ f(0,x) &= 0^3 - \frac{3x}{0} \quad \text{nicht definiert, da Division durch 0} \end{aligned}$$

V ist das Volumen eines Quaders mit den Kantenlängen a, b und c:

$$V(a,b,c) = abc$$

Definitionen und Regeln | **Beispiele**

Definitionsmenge eines Terms

Ein Term $T(x)$, der Brüche oder Quotienten enthält, ist für diejenigen Werte von x nicht definiert, für die ein Nenner oder Divisor den Wert null annimmt. Die *Definitionsmenge* D_T eines Terms $T(x)$ ist die Menge aller Zahlen aus der Grundmenge G ohne die Nullstellen der Nenner bzw. Divisoren. Ist nichts anderes angegeben, dann verwenden wir als Grundmenge die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen.

$$T(x) = \frac{2+x}{4-x} + \frac{2}{2x+5}$$

Nullstellen der Nenner:

$$4 - x = 0 \Longrightarrow x = x_1 = 4$$
$$2x + 5 = 0 \Longrightarrow x = x_2 = -2{,}5$$

$$D_T = G \setminus \{-2{,}5; 4\}$$

Wie die Definitionsmenge wirklich aussieht, hängt von der Grundmenge ab:

$$G = \mathbb{Q} \Longrightarrow D_T = \mathbb{Q} \setminus \{-2{,}5; 4\}$$
$$G = \mathbb{Z} \Longrightarrow D_T = \mathbb{Z} \setminus \{4\}$$

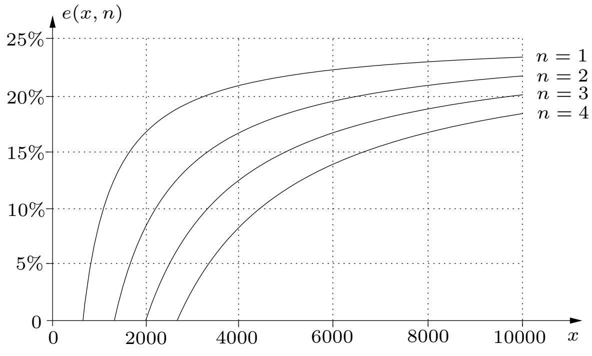
Aufstellen von Termen

Um einen Term zur Berechnung einer bestimmten mathematischen Größe zu finden, stellt man folgende Überlegungen an:

- Welche Variablen braucht man?
- Welche Namen gibt man den Variablen?
- Welche Zahlenbereiche sind für die Variablen sinnvoll?
- Wie berechnet man aus den Variablen die gesuchte Größe?

Wenn man den Term gefunden hat, muss man die Information, die in ihm steckt, verdeutlichen. Dazu erstellt man eine Wertetabelle und veranschaulicht diese Werte in einer Grafik (Balkendiagramm, Koordinatensystem).

Nachfolgende Grafik zeigt den effektiven Steuersatz des nebenstehenden Beispiels für eine, zwei, drei und vier Personen pro Familie:



Das Steuermodell von Kirchhoff (2005)

Vom gesamten Jahreseinkommen einer Familie werden pro Person 8000 € Freibetrag abgezogen, vom Rest sind 25% Steuern zu zahlen.
Der effektive Steuersatz gibt an, wieviel Prozent des Einkommens die Steuern ausmachen. Gesucht ist ein Term, der den effektiven Steuersatz aus dem Monatseinkommen berechnet.

x : Monatseinkommen
$12x$: Jahreseinkommen
n : Zahl der Personen in der Familie
s : zu zahlende Steuern pro Jahr
e : effektiver Steuersatz

$$s = 25\% \cdot (12x - n \cdot 8000)$$
$$e = \frac{s}{12x} = 25\% \cdot \frac{12x - 8000n}{12x} = 25\% \cdot \left(1 - \frac{2000n}{3x}\right)$$

Diese Formel gilt nur, wenn $12x > 8000n$ ist, für $12x \leqq 8000n$ zahlt man keine Steuern:

$$\boxed{e(x,n) = \begin{cases} 25\% \cdot \left(1 - \frac{8000n}{x}\right) & \text{für } x > \frac{2000n}{3} \\ 0 & \text{für } x \leqq \frac{2000n}{3} \end{cases}}$$

Die folgende Wertetabelle gibt den effektiven Steuersatz in Prozent an:

x	1000	2000	4000	6000	8000	10000
$n = 1$	8,3	16,7	20,8	22,2	22,9	23,3
$n = 2$	0	8,3	16,7	19,4	20,8	21,7
$n = 3$	0	0	12,5	16,7	18,8	20,0
$n = 4$	0	0	8,3	13,9	16,7	18,3

Definitionen und Regeln	Beispiele
Termumformungen **Äquivalente Terme** Zwei Terme mit Variablen heißen *äquivalent*, wenn sie für jede Ersetzung der Variablen den gleichen Wert ergeben. $T(x)$ und $F(x)$ sind also äquivalent, wenn für *jedes* x aus der gemeinsamen Definitionsmenge $T(x) = F(x)$ gilt. Zur Überprüfung der Äquivalenz zweier Terme muss wirklich jedes Element der gemeinsamen Definitionsmenge der beiden Terme eingesetzt werden. Da die Definitionsmenge meistens aus unendlich vielen Elementen besteht, ist diese Art der Überprüfung in der Praxis nicht möglich. In den folgenden Kapiteln lernen wir Methoden kennen, wie man Terme in äquivalente Terme umrechnet (Äquivalenzumformungen).	$T(x) = x^3 - x^2$, $F(x) = 2x$ $T(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 = -1 - 1 = -2$ $F(-1) = 2 \cdot (-1) = -2$, also $T(-1) = F(-1)$ $T(0) = 0^3 - 0^2 = 0$ $F(0) = 2 \cdot 0 = 0$, also $T(0) = F(0)$ $T(2) = 2^3 - 2^2 = 8 - 4 = 4$ $F(2) = 2 \cdot 2 = 4$, also $T(2) = F(2)$ aber: $T(1) = 1^3 - 1^2 = 1 - 1 = 0$ $F(1) = 2 \cdot 1 = 2$, also $T(1) \neq F(1)$ $T(x)$ ist also nicht äquivalent zu $F(x)$. $A(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x + y}$, $B(x, y) = x - y$ $A(2; 1) = \frac{2^2 - 1^2}{2 + 1} = \frac{3}{3} = 1$ $B(2; 1) = 2 - 1 = 1$, also $A(2; 1) = B(2; 1)$ Alle weiteren Ersetzungen ergeben ebenfalls $A(x; y) = B(x; y)$, d.h die beiden Terme sind äquivalent (exakter Beweis folgt später).
Zusammenfassen von Termen Zwei Terme heißen *gleichartig*, wenn sie sich nur in einem Zahlenfaktor (dem *Koeffizienten*) unterscheiden. Zwei gleichartige Terme fasst man zusammen, indem man den gemeinsamen Faktor mit Hilfe des Distributivgesetzes (DG) ausklammert. Trick für viele Terme: Den fehlenden Faktor 1 dazuschreiben, z.B. $x^2 = 1 \cdot x^2$	$4x^3$, $-3x^3$ und x^3 sind gleichartig, die Koeffizienten lauten 4, -3 und 1. Die Terme $2a^2$ und $4a^3$ sind nicht gleichartig. $5x + 2x = (5 + 2)x = 7x$ $5a^3 - a^3 = 5 \cdot a^3 - 1 \cdot a^3 = (5 - 1)a^3 = 4a^3$ $8x^2 - 12x^2 + x^2 = (8 - 12 + 1)x^2 = (-3)x^2 = -3x^2$ $-5z - 4z = (-5)z + (-4)z = [(-5) + (-4)]z = -9z$ $4x + 7y - 5x - 3y = (4x - 5x) + (7y - 3y) = -x + 4y$ $5a^2x^3 - 4ax^2 + 3a^2x^3 - 3ax^2 = 8a^2x^3 - 7ax^2$
Multiplikation und Division Assoziativgesetz : $\boxed{abc = (ab)c = a(bc)}$ Kommutativgesetz : $\boxed{ab = ba}$ $a \cdot b : c = \frac{ab}{c} = \frac{a}{c} \cdot b = (a : c) \cdot b$ $\boxed{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$ $\boxed{(ab)^n = a^n b^n}$ $(-1)^n = \begin{cases} +1 & \text{für gerades } n \\ -1 & \text{für ungerades } n \end{cases}$	$3 \cdot 4x = 3 \cdot (4 \cdot x) = (3 \cdot 4) \cdot x = 12x$ **Vorsicht:** $3 \cdot ab \neq 3a \cdot 3b$ $3x \cdot 5y = (3 \cdot 5) \cdot (x \cdot y) = 15xy$ $4a \cdot 3u \cdot 5a \cdot \frac{1}{10}u^2 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 5}{10} \cdot (a \cdot a \cdot u \cdot u^2) = 6a^2u^3$ $12a : 4 = (12 : 4)a = 3a$ $x^3 \cdot x^5 = x^8$ $(2a)^3 = 2^3a^3 = 8a^3$ $2^7 \cdot 5^7 = (2 \cdot 5)^7 = 10^7$ $(-1)^9 = -1, \quad (-1)^{24} = 1$ $(-2)^9 = [(-1) \cdot 2]^9 = (-1)^9 \cdot 2^9 = -512$

Definitionen und Regeln	**Beispiele**
Ausmultiplizieren Grundlage für das Ausmultiplizieren sind das Distributivgesetz: $\boxed{a(b+c)=ab+ac}$ und die Vorzeichenregeln $\boxed{(+)\cdot(+)=(+)}$ $\boxed{(+)\cdot(-)=(-)\cdot(+)=(-)}$ $\boxed{(-)\cdot(-)=(+)}$ $-a(b-c)=(-a)(b+(-c))=$ $=(-a)b+(-a)(-c)=$ $=-ab+ac$	$5(a+2b)=5a+10b$ $a^2(a^2-ab+b)=a^4-a^3b+a^2b$ $(-3)(5s-3r)=(-3)\cdot 5s+(-3)\cdot(-3r)=$ $-3(2a-4b+c-d)=-6a+12b-3c+3d$ $-4x^2(-3xy+2x^2-5x^3y^2)=12x^3y-8x^4+20x^5y^2$ $\frac{3}{4}r^3s^2\left(\frac{2}{9}rs^2-\frac{5}{6}r^2s^3\right)=\frac{1}{6}r^4s^4-\frac{5}{8}r^5s^5$ $-(a-b+c)=(-1)(a-b+c)=-a+b-c$ Ein Minuszeichen vor einer Klamer öndert das Vorzeichen jedes Summanden in der Klammer. $u^2v-2v^2-(u^2v-v^2)=u^2v-2v^2-u^2v+v^2=-v^2$
Ausmultiplizieren von zwei Summen: $(a+b)(c+d)=(a+b)c+(a+b)d=$ $=ac+bc+ad+bd$ Jeder Summand der ersten Klammer wird, unter Berücksichtigung der Vorzeichen, mit jedem Summanden der zweiten Klammer multipliziert.	$(x-3)(x+5)=x^2-3x+5x-15=x^2+2x-15$ $(a-b)(x-y-z)=ax-bx-ay+by-az+bz$ $(-x-y)(-x-z)=x^2+xy+yz+yz$ $\left(\frac{a^2}{2}-\frac{ab}{3}\right)\left(\frac{ab^2}{3}+\frac{a^2b}{2}\right)=\frac{a^4b}{4}-\frac{a^2b^3}{9}$ $(1-x)(1+y)(1-z)=(1-x+y-xy)(1-z)=$ $=1-x+y-z-xy+xz-yz+xyz$
Binomische Formeln Ein *Binom* ist eine Summe mit zwei Summanden, z.B. $a+b$ oder $x-y$. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$	$(2s+3r)^2=4s^2+12sr+9r^2$ $(-a-b)^2=[(-1)(a+b)]^2=(-1)^2(a+b)^2=$ $=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ $\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)^2=\frac{x^2}{4}-\frac{xy}{3}+\frac{y^2}{9}$ $2001^2=(2000+1)^2=2000^2+2\cdot 2000\cdot 1+1^2=$ $=4\,000\,000+2000+1=4\,002\,001$ $1999^2=(2000-1)^2=2000^2-2\cdot 2000\cdot 1+1^2=$ $=4\,000\,000-2000+1=3\,998\,001$ $(1-x)(1+x)=1-x^2$
Ausklammern Das Ausklammern ist eine Anwendung des Distributivgesetzes. $\boxed{a-b+c=k\cdot\left(\frac{a}{k}-\frac{b}{k}+\frac{c}{k}\right)}$ $\boxed{a-b+c=\frac{1}{k}\cdot(ka-kb+kc)}$	$x^2y+xy^2-x^2y^2=xy(x+y-xy)$ $a^8+a^7+a^4=a^4\left(a^4+a^3+1\right)$ $a^2-x^2=a^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$ $36x^3-48x^2-24x=12x(3x^2-4x-2)$ $\frac{x}{7}-\frac{xy}{2}+\frac{x^2}{3}=\frac{x}{42}(6-21y+14x)$

Definitionen und Regeln | **Beispiele**

Gleichungen

Eine *Gleichung* für die Variable x besteht aus zwei Termen $T(x)$ und $R(x)$, die durch das Gleichheitszeichen verbunden sind:

$$T(x) = R(x)$$

Von der sprachlichen Struktur her ist eine Gleichung eine Behauptung (Aussage), nämlich die, dass die linke Seite $T(x)$ gleich der rechten Seite $R(x)$ ist. Diese Behauptung kann wahr oder falsch sein, je nachdem, welchen Wert die Variable x annimmt.

> Die *Lösungsmenge* L der Gleichung $T(x) = R(x)$ zur *Grundmenge* G besteht aus allen Zahlen $x \in G$, für die $T(x) = R(x)$ eine wahre Aussage ist.

Beispiel: $\underbrace{x^2}_{T(x)} = \underbrace{3x + 10}_{R(x)}$, $G = \{-2; 0; 1; 2; 5; 6\}$

x	-2	0	1	2	5	6
$T(x)$	4	0	1	4	25	36
$R(x)$	4	10	13	16	25	28

Der Tabelle entnimmt man, dass $T(x) = R(x)$ für $x = -2$ und $x = 5$ eine wahre Aussage ist, für die anderen Werte aus G dagegen nicht $\Longrightarrow$

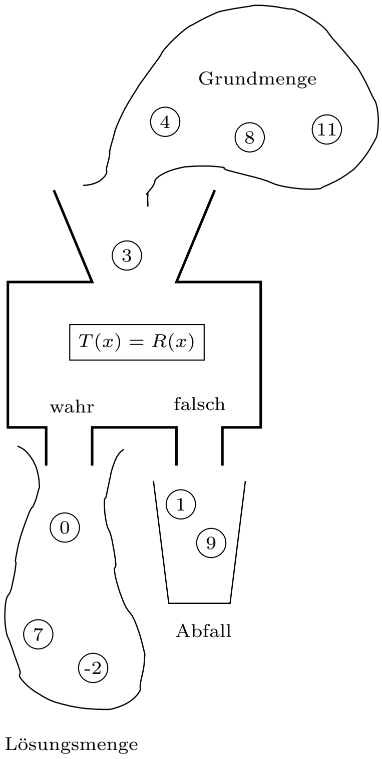
$$L = \{-2; 5\}$$

Bei manchen Gleichungen sind die vorkommenden Terme für einige x-Werte nicht definiert (Nullstellen im Nenner). Die Grundmenge ohne diese nichterlaubten Werte heißt *Definitionsmenge* (D) der Gleichung. D ist der Durchschnitt von G und den Definitionsmengen der einzelnen Terme (siehe S. 20).

Ist eine Gleichung für kein x erfüllt, dann ist die Lösungsmenge gleich der leeren Menge.

Ist eine Gleichung für jedes x wahr, dann ist die Lösungsmenge gleich der Definitionsmenge.

Ist bei einer Gleichung keine Grundmenge angegeben, dann nimmt man die größtmögliche Grundmenge an (bei uns $\mathbb{Q}$).



$x^2 = x$, $G = \mathbb{Q} \quad \Longrightarrow \quad L = \{0; 1\}$

$x^2 = x$, $G = \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad L = \{1\}$

$x^2 = x$, $G = \{2; 4; 7\} \quad \Longrightarrow \quad L = \{\}$

$x^2 = -1$, $G = \mathbb{Q} \quad \Longrightarrow \quad L = \{\}$

$x^2 = x \cdot x$, $G = \mathbb{Z} \quad \Longrightarrow \quad L = G = \mathbb{Z}$

$x \cdot 0 = 0$, $G = \mathbb{Q} \quad \Longrightarrow \quad L = G = \mathbb{Q}$

$x \cdot 0 = 7$, $G = \mathbb{Q} \quad \Longrightarrow \quad L = \{\}$

$\frac{x}{x} = 1$, $G = \mathbb{Q} \quad \Longrightarrow \quad L = D = \mathbb{Q}\backslash\{0\}$

$\frac{2x-2}{x-1} = \frac{2x-6}{x-3}$, $G = \mathbb{Q} \quad \Longrightarrow$

$L = D = \mathbb{Q}\backslash\{1; 3\}$

A und B seien zwei Aussagen (Aussagesätze, die wahr oder falsch sein können).

$A \Longrightarrow B$: „Wenn A, dann B“ oder genauer „Wenn A wahr ist, dann ist auch B wahr“

$A \Longleftarrow B$: „Wenn B, dann A“

$A \Longleftrightarrow B$: „A genau dann wenn B“
A und B sind gleichwertig
A ist *äquivalent* zu B

x sei eine natürliche Zahl.

$A =$ „2 ist Teiler von x“
$B =$ „3 ist Teiler von x“
$C =$ „2 ist Teiler von x und 3 ist Teiler von x“
$D =$ „6 ist Teiler von x“

$$\left.\begin{array}{l} D \Longrightarrow A \\ D \Longrightarrow B \\ D \Longrightarrow C \\ C \Longrightarrow D \\ C \Longleftrightarrow D \end{array}\right\} \text{richtig} \qquad \left.\begin{array}{l} A \Longrightarrow D \\ B \Longrightarrow D \\ A \Longleftrightarrow D \\ B \Longleftrightarrow D \end{array}\right\} \text{falsch}$$

Definitionen und Regeln | **Beispiele**

Äquivalenzumformungen von Gleichungen

Zwei Gleichungen mit gleicher Grundmenge heißen *äquivalent*, wenn sie die gleiche Lösungsmenge besitzen. Eine *Äquivalenzumformung* verwandelt eine Gleichung in eine äquivalente Gleichung. Zwischen äquivalenten Gleichungen schreibt man „$\Longleftrightarrow$“.

Eine Gleichung geht in eine äquivalente Gleichung über, wenn man auf beiden Seiten den gleichen Term addiert oder von beiden Seiten den gleichen Term subtrahiert:

$$\begin{aligned} & T(x) = R(x) \\ \Longleftrightarrow\quad & T(x)+S(x) = R(x)+S(x) \\ \Longleftrightarrow\quad & T(x)-S(x) = R(x)-S(x) \end{aligned}$$

Eine Gleichung geht in eine äquivalente Gleichung über, wenn man beide Seiten mit dem gleichen Term ($\neq 0$) multipliziert oder beiden Seiten durch den gleichen Term ($\neq 0$) dividiert. Für $S(x) \neq 0$ gilt also:

$$\begin{aligned} & T(x) = R(x) \\ \Longleftrightarrow\quad & T(x)\cdot S(x) = R(x)\cdot S(x) \\ \Longleftrightarrow\quad & \frac{T(x)}{S(x)} = \frac{R(x)}{S(x)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{lcl} x+a=b & \Longleftrightarrow & x=b-a \\ x-a=b & \Longleftrightarrow & x=b+a \end{array}}$$

Für $a \neq 0$ gilt:

$$\boxed{\begin{array}{lcl} x\cdot a=b & \Longleftrightarrow & x=\dfrac{b}{a} \\ \dfrac{x}{a}=b & \Longleftrightarrow & x=b\cdot a \end{array}}$$

$ax=b,\quad G=\mathbb{Q} \quad\Longrightarrow\quad D=\mathbb{Q}$		
$a\neq 0$	$a=0, b\neq 0$	$a=0, b=0$
$L=\left\{\frac{a}{b}\right\}$	$L=\{\}$	$L=\mathbb{Q}$

Jede Gleichung der Form $T(x) = R(x)$ kann in der Form $G(x) = 0$ geschrieben werden, denn

$$\begin{aligned} & T(x) = R(x) \qquad \mid -R(x) \\ \Longleftrightarrow\quad & T(x)-R(x) = R(x)-R(x) \\ \Longleftrightarrow\quad & \underbrace{T(x)-R(x)}_{G(x)} = 0 \end{aligned}$$

Das *Umstellen* von Gleichungen ist die konsequente Anwendung von Äquivalenzumformungen:

$$\begin{aligned} & x+a = b \qquad \mid -a \\ \Longleftrightarrow\quad & x+a-a = b-a \\ \Longleftrightarrow\quad & x = b-a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x\cdot a = b \qquad \mid :a \\ \Longleftrightarrow\quad & x\cdot a : a = b : a \\ \Longleftrightarrow\quad & x = b : a = \frac{b}{a} \end{aligned}$$

Für die folgenden Beispiele sei $D = \mathbb{Q}$:

$x+9=7 \Longleftrightarrow x=7-9=-2 \Longrightarrow L=\{-2\}$

$x-3=-5 \Longleftrightarrow x=-5+3=-2 \Longrightarrow L=\{-2\}$

$3x=18 \quad\Longleftrightarrow\quad x=\frac{18}{3}=6 \quad\Longrightarrow\quad L=\{6\}$

$\frac{x}{7}=3 \quad\Longleftrightarrow\quad x=3\cdot 7=21 \quad\Longrightarrow\quad L=\{21\}$

Für $a \neq 0$ und $b \neq 0$ gilt:

$\frac{a}{x}=b \quad\Longleftrightarrow\quad a=b\cdot x \quad\Longleftrightarrow\quad x=\frac{a}{b}$

$\frac{a}{x}=b,\quad G=\mathbb{Q} \quad\Longrightarrow\quad D=\mathbb{Q}\setminus\{0\}$			
$a\neq 0, b\neq 0$	$a=0, b\neq 0$	$a\neq 0, b=0$	$a=0, b=0$
$L=\left\{\frac{a}{b}\right\}$	$L=\{\}$	$L=\{\}$	$L=\mathbb{Q}\setminus\{0\}$

Lineare Gleichungen

Eine Gleichung heißt *linear*, wenn die Unbekannte x nur in Termen der Form ax vorkommt. Es dürfen keine Produkte von Termen auftreten, die beide x enthalten, es dürfen keine Potenzen x^n mit $n \geqq 2$ dabei sein und x darf nicht in Nennern oder Divisoren stehen.

lineare Gleichungen	nichtlineare Gleich.
$5x=3$	$x^2=9$
$11x-5-3x=2x-8-3x$	$\frac{3}{x-1}=5x$
$5(3-7x)=9(x-8)$	$x^5-x^3=3x-8$

Definitionen und Regeln | **Beispiele**

Strategie zum Lösen linearer Gleichungen

- Wenn erforderlich, beide Gleichungsseiten vereinfachen (Ausmultiplizieren, Zusammenfassen).
- Alle Terme mit der Unbekannten nach links, alle anderen Terme nach rechts.
- Zusammenfassen, bis die Form $ax = b$ erreicht ist.

Manche nichtlinearen Gleichungen können durch Äquivalenzumformungen auf lineare Gleichungen zurüchgeführt werden.

Für die folgenden Beispiele ist $G = \mathbb{Q}$:

$$\begin{aligned} & -8x + 3 = 1 && \mid -3 \\ \iff\ & -8x = -2 && \mid :(-8) \\ \iff\ & x = \frac{-2}{-8} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 5x - 8 - 9x = 3(2 - 3x) - 4x \\ \iff\ & -4x - 8 = 6 - 13x && \mid +13x + 8 \\ \iff\ & 9x = 14 \\ \iff\ & x = \frac{14}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (x - 1)(x + 2) = (x - 3)(x - 4) \\ \iff\ & x^2 + x - 2 = x^2 - 7x + 12 && \mid -x^2 + 7x + 2 \\ \iff\ & 8x = 14 \\ \iff\ & x = \frac{14}{8} = \frac{7}{4} \end{aligned}$$

Textaufgaben

- Variablen definieren (hinschreiben, welche Bedeutung die Variablen haben).
- Gleichung aufstellen, die dem Angabentext entspricht (noch nichts umstellen oder schon ausrechnen).
- Gleichung lösen.
- Lösungen interpretieren, Probe.

Eine Mutter sagt zu ihrer Tochter: „Heute bin ich genau viermal so alt wie du, vor zwei Jahren war ich noch fünfmal so alt wie du es damals warst.“ Wie alt sind Mutter und Tochter heute?

Festlegung der Variablen:

Alter der Tochter heute	:	t
Alter der Mutter heute	:	$m = 4t$
Alter der Tochter vor 2 a	:	$t - 2$
Alter der Mutter vor 2 a	:	$m - 2 = 4t - 2$

$$\begin{aligned} & 4t - 2 = 5(t - 2) \\ \iff\ & 4t - 2 = 5t - 10 && \mid -4t + 10 \\ \iff\ & t = 8 \end{aligned}$$

Die Tochter ist heute 8 Jahre alt, die Mutter 32.

Probe: Vor zwei Jahren: Tochter 6, Mutter 30
$5 \cdot 6 = 30$

Mittelwerte

Das *arithmetische Mittel* (Durchschnitt) der Größen a_1, a_2, ... , a_n ist

$$\overline{a} = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$$

Besteht eine Ansammlung von Daten aus z_1 mal dem Wert a_1, z_2 mal dem Wert a_2, ... , z_n mal dem Wert a_n, dann ist das arithmetische Mittel

$$\overline{a} = \frac{z_1a_1 + z_2a_2 + ... + z_na_n}{z_1 + z_2 + ... + z_n}$$

Notenverteilung einer Schulaufgabe:

1	2	3	4	5	6
1	4	7	8	6	3

Die Durchschnittsnote ist

$$N = \frac{1 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 8 \cdot 4 + 6 \cdot 5 + 3 \cdot 6}{1 + 4 + 7 + 8 + 6 + 3} = \\ = \frac{110}{29} \approx 3{,}79$$

Geometrie

Definitionen und Regeln | **Beispiele**

Elemente der Geometrie

Eine *Gerade* ist eine nach beiden Seiten unendlich lange, gerade Linie.

$\boxed{\text{Durch zwei Punkte A und B läßt sich genau eine Gerade } g = \text{AB zeichnen.}}$

Die *Halbgerade* [EF besteht aus allen Punkten der Geraden EF, die auf der gleichen Seite von E liegen wie F. Der Randpunkt E gehört zu [EF.
Sind C und D zwei Punkte, dann ist die *Strecke* [CD] der Teil der Geraden CD zwischen den Punkten C und D. Die Randpunkte C und D gehören zur Strecke [CD].

$$\boxed{\overline{\mathrm{CD}} = \text{Länge der Strecke [CD]}}$$

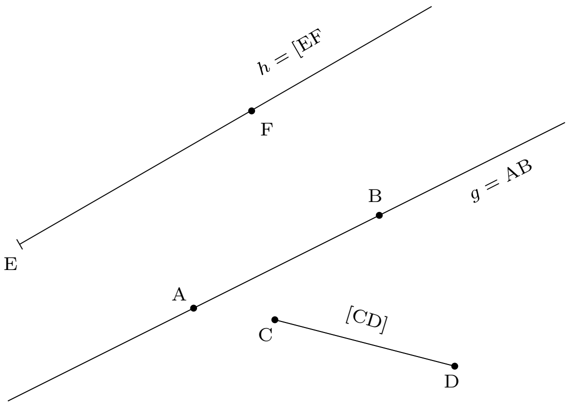
Geraden und Strecken sind Punktmengen.

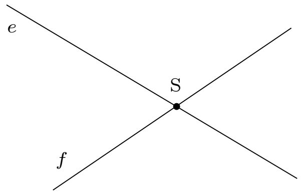
P ist ein Punkt der Geraden g: $\mathrm{P} \in g$

Der Schnittpunkt der Geraden e und f ist S:

$$e \cap f = \{\mathrm{S}\}$$

$$[\mathrm{CD}] = [\mathrm{CD} \cap [\mathrm{DC}$$



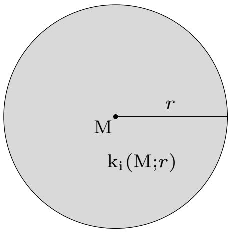


Der Kreis

Der Kreis (die Kreislinie) um den *Mittelpunkt* M mit *Radius* r ist die Menge aller Punkte P mit $\overline{\mathrm{MP}} = r$:

$$\mathrm{k}(\mathrm{M};r) = \{P \mid \overline{\mathrm{MP}} = r\}$$

$$\begin{aligned} \text{Kreisinneres :} \quad & \mathrm{k_i}(\mathrm{M};r) = \{P \mid \overline{\mathrm{MP}} < r\} \\ \text{Kreisäußeres :} \quad & \mathrm{k_a}(\mathrm{M};r) = \{P \mid \overline{\mathrm{MP}} > r\} \end{aligned}$$



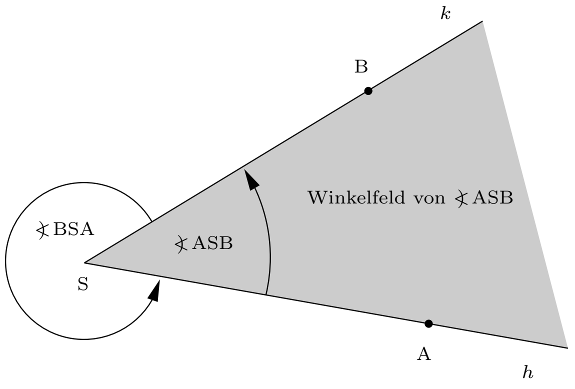
Winkel

Ein *Winkel* ist ein geordnetes Paar von Halbgeraden mit dem gleichen Anfangspunkt. Die Halbgeraden sind die *Schenkel*, der gemeinsame Punkt ist der *Scheitel* des Winkels.

Beispiel: $h = [\mathrm{SA}$, $k = [\mathrm{SB}$

$$\sphericalangle \mathrm{ASB} = \sphericalangle(h,k), \quad \sphericalangle \mathrm{BSA} = \sphericalangle(k,h)$$

Dreht man die erste Halbgerade eines Winkels im *Gegenuhrzeigersinn* um den Scheitel bis zur zweiten Halbgeraden, dann überstreicht sie das *Winkelfeld* dieses Winkels.



Definitionen und Regeln

Winkelmaße

In der 10. Klasse wird bewiesen: Die Kreislinie mit Radius r hat die Länge

$$U = 2\pi r \quad \text{mit} \quad \pi \approx 3{,}14159$$

U heißt *Umfang* des Kreises.

Definition: $\boxed{1^\circ = \dfrac{\pi}{180}}$

$$\Longrightarrow \quad \pi = 180^\circ, \quad 2\pi = 360^\circ, \quad U = 360^\circ \cdot r$$

Ein Kreis mit dem Radius $r = 1$ (wir verzichten hier auf eine Längeneinheit) heißt *Einheitskreis.*

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Der Einheitskreis hat den Umfang} \\ \qquad U = 2\pi = 360^\circ.\end{array}}$$

Das Winkelfeld eines Winkels schneidet aus dem Einheitskreis um den Scheitel einen Bogen der Länge b heraus. Diese Bogenlänge verwenden wir als Maß des Winkels. Dem vollen Winkel entspricht der ganze Umfang als Bogenlänge, d.h. der volle Winkel hat das Maß 360°.

Winkel werden mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet. Dabei setzt man meistens (etwas schlampig!) den Winkel (das geordnete Paar von Halbgeraden) und das Winkelmaß (eine Zahl) gleich, z.B. $\alpha = \sphericalangle \mathrm{ASB} = 40^\circ$.

Winkelname	Bereich
spitzer Winkel	$0 < \alpha < 90^\circ$
rechter Winkel	$\alpha = 90^\circ$
stumpfer Winkel	$90^\circ < \alpha < 180^\circ$
gestreckter Winkel	$\alpha = 180^\circ$
überstumpfer Winkel	$180^\circ < \alpha < 360^\circ$
voller Winkel	$\alpha = 360^\circ$

Verfeinerung des Winkelmaßes:

Winkelminute: $1' = \dfrac{1^\circ}{60}$

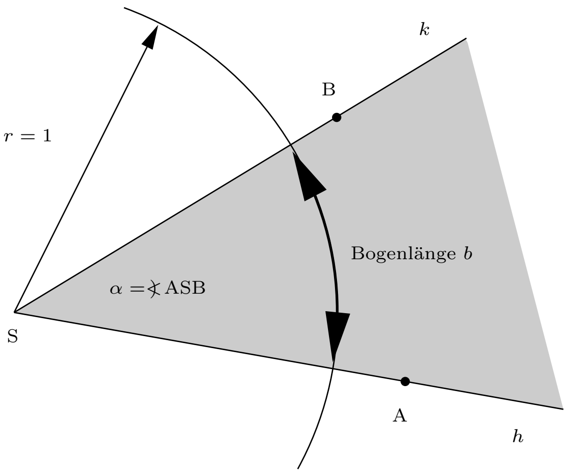
Winkelsekunde: $1'' = \dfrac{1'}{60} = \dfrac{1^\circ}{3600}$

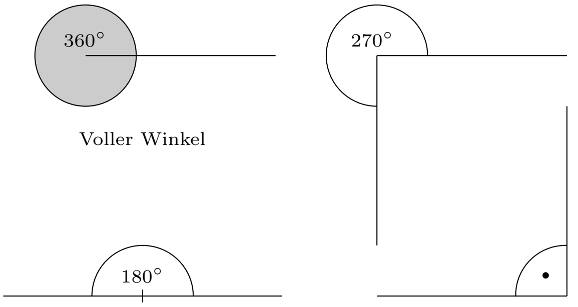
$$\boxed{1^\circ = 60' = 3600''}$$

$$28^\circ\, 48'\, 36'' = 28^\circ + \frac{48^\circ}{60} + \frac{36^\circ}{3600} = 28{,}81^\circ$$

$$\begin{aligned} 79{,}54^\circ &= 79^\circ + 0{,}54 \cdot 60' = 79^\circ + 32{,}4' = \\ &= 79^\circ\, 32' + 0{,}4 \cdot 60'' = 79^\circ\, 32'\, 24'' \end{aligned}$$

Beispiele





Voller Winkel

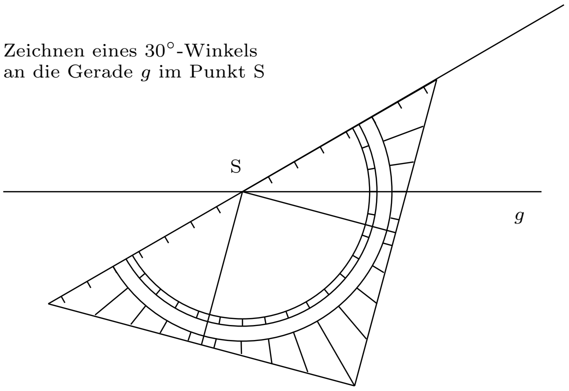
gestreckter Winkel

rechter Winkel (90°)

Die wichtigsten griechischen Buchstaben:

α	Alpha	φ	Phi
β	Beta	ψ	Psi
γ	Gamma	π	Pi
δ	Delta	σ	Sigma
ε	Epsilon	ϱ	Rho
λ	Lambda	μ	Mu
ω	Omega	ϑ	Theta
η	Eta	τ	Tau

Zeichnen eines 30°-Winkels an die Gerade g im Punkt S



Definitionen und Regeln

Beispiele

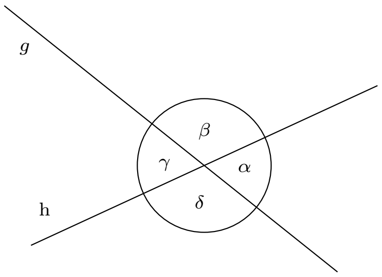
Winkel an einer Geradenkreuzung

Zwei gegenüberliegende Winkel an einer Geradenkreuzung heißen *Scheitelwinkel*, zwei benachbarte Winkel heißen *Nebenwinkel*. In nebenstehender Abbildung sind die Paare (α, γ) und (β, δ) Scheitelwinkel, die Paare (α, β), (β, γ), (γ, δ) und (δ, α) sind Nebenwinkel. Zwei Nebenwinkel bilden zusammen einen gestreckten Winkel:

$$\boxed{\text{Nebenwinkel ergänzen sich zu } 180^\circ.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha+\beta=180^\circ \Longrightarrow \alpha=180^\circ-\beta\\ \gamma+\beta=180^\circ \Longrightarrow \gamma=180^\circ-\beta\end{array}\right\}\Longrightarrow \alpha=\gamma$$

$$\boxed{\text{Scheitelwinkel sind gleich.}}$$



$$\alpha+\beta=\beta+\gamma=\gamma+\delta=\delta+\alpha=180^\circ$$

$$\alpha=\gamma, \qquad \beta=\delta$$

Kongruente Dreiecke

Standardbezeichnungen am Dreieck

Die Ecken werden mit Großbuchstaben, die gegenüberliegenden Seiten mit dem entsprechenden Kleinbuchstaben bezeichnet. Den Winkel (genauer Innenwinkel) an einer Ecke bezeichnet man, wenn möglich, mit dem entsprechenden griechischen Buchstaben.

Kongruente Figuren

Zwei Figuren heißen *kongruent* oder *deckungsgleich*, wenn man sie passgenau aufeinander legen kann. Kongruente Figuren kann man durch eine Bewegung ineinander überführen.

Zwischen kongruente Figuren schreibt man das Zeichen „≅“. Bei der Schreibweise ist zu beachten, dass einander entsprechende Punkte der kongruenten Figuren an entsprechenden Stellen stehen.

$$\triangle\mathrm{ABC} \cong \triangle\mathrm{DEF}$$

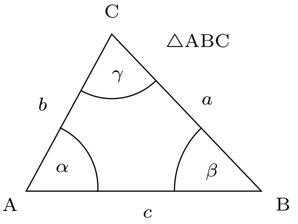
bedeutet: $\mathrm{A} \mathrel{\widehat{=}} \mathrm{D}$, $\mathrm{B} \mathrel{\widehat{=}} \mathrm{E}$, $\mathrm{C} \mathrel{\widehat{=}} \mathrm{F}$
$a = d$, $b = e$, $c = f$
$\alpha = \delta$, $\beta = \varepsilon$ und $\gamma = \varphi$.

Kongruenzaxiome

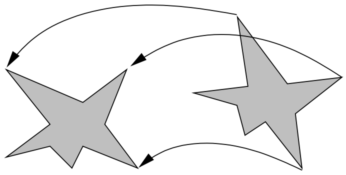
Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in

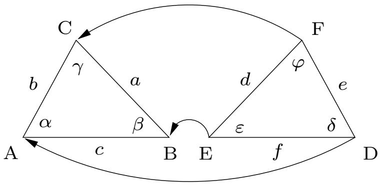
1. drei Seiten (sss)
2. einer Seite und den anliegenden Winkeln (wsw)
3. zwei Seiten und dem Zwischenwinkel (sws)
4. zwei Seiten und dem Gegenwinkel der größeren Seite (ssW)

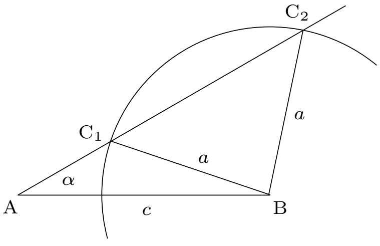
übereinstimmen.



Zwei kongruente Figuren:







Die beiden Dreiecke $\triangle\mathrm{ABC}_1$ und $\triangle\mathrm{ABC}_2$ stimmen in $a = 4\,\mathrm{cm}$, $c = 6\,\mathrm{cm}$ und in $\alpha = 30^\circ$ überein, sind aber trotzdem nicht kongruent (α ist der Gegenwinkel der *kleineren* Seite, da $a < c$).

Definitionen und Regeln | **Beispiele**

Konstruktionen

Winkelübertragung

Gegeben ist der Winkel $\alpha = \sphericalangle(e,f)$ mit dem Scheitel S und die Halbgerade g mit dem Endpunkt P. α soll so an g angetragen werden, dass P der Scheitel und g ein Schenkel des Winkels ist:

$k_1 = \text{k}(\text{S};r)$ (r beliebig)

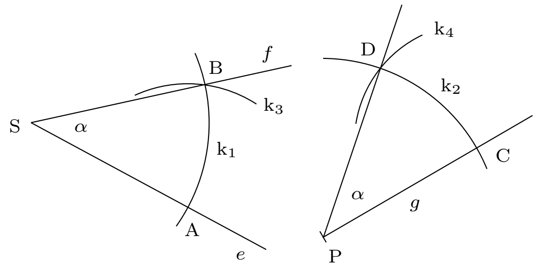
$\{\text{A}\} = e \cap k_1$, $\{\text{B}\} = f \cap k_1$

$k_2 = \text{k}(\text{P};r)$, $\{\text{C}\} = g \cap k_2$

$k_3 = \text{k}(\text{A};r = \overline{\text{AB}})$, $k_4 = \text{k}(\text{C};r = \overline{\text{AB}})$

$\{\text{D}\} = k_2 \cap k_4$, [PD ist der gesuchte Schenkel.

Die folgende Konstruktion beruht auf der Kongruenz $\triangle\text{SAB} \cong \triangle\text{PCD}$ (sss).



Winkelhalbierende

Gegeben ist der Winkel $\alpha = \sphericalangle(e,f)$ mit dem Scheitel S. Gesucht ist eine Gerade w_α durch S, die α in zwei gleiche Winkel zerlegt:

$k_1 = \text{k}(\text{S};r)$ (r beliebig)

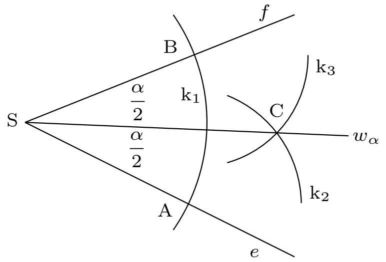
$\{\text{A}\} = e \cap k_1$, $\{\text{B}\} = f \cap k_1$

$k_2 = \text{k}(\text{A};r')$ (r' genügend groß)

$k_3 = \text{k}(\text{B};r')$ $\{\text{C}\} = k_2 \cap k_3$

$w_\alpha = \text{SC}$ ist die gesuchte Winkelhalbierende.

Die folgende Konstruktion beruht auf der Kongruenz $\triangle\text{SAC} \cong \triangle\text{SBC}$ (sss).



Lotkonstruktionen

Konstruktion der Mittelsenkrechten m_{AB} der Strecke [AB]:

$k_1 = \text{k}(\text{A};r)$ ($r > \frac{\overline{\text{AB}}}{2}$, sonst beliebig)

$k_2 = \text{k}(\text{B};r)$, $k_1 \cap k_2 = \{\text{P,Q}\}$

$m_{\text{AB}} = \text{PQ}$

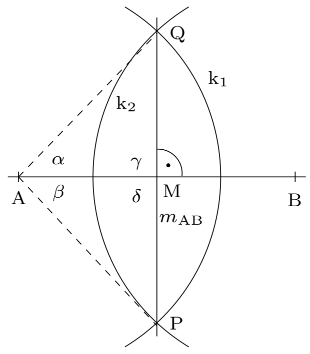
$\{\text{M}\} = m_{\text{AB}} \cap \text{AB}$ ist der Mittelpunkt von [AB].

Senkrechte auf g in $\text{P} \in g$ errichten:

Ein Kreis um P mit beliebigem Radius schneidet g in A und in B. Dann Mittelsenkrechte auf [AB].

Lot von $\text{P} \notin g$ auf g fällen:

Ein Kreis um P mit genügend großem Radius schneidet g in A und in B. Dann Mittelsenkrechte auf [AB].

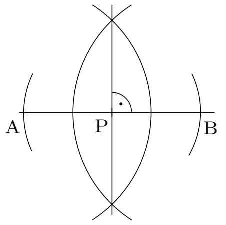


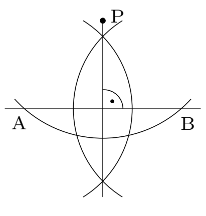
Beweis für die Richtigkeit der Konstruktion:

$\triangle\text{ABQ} \cong \triangle\text{ABP}$ (sss) $\quad\Longrightarrow\quad \alpha = \beta$

$\triangle\text{AMQ} \cong \triangle\text{AMP}$ (sws) $\quad\Longrightarrow\quad \gamma = \delta$

Nebenwinkel: $\gamma + \delta = 2\gamma = 180°, \quad \gamma = 90°$





Definitionen und Regeln

Parallelen

Winkel an einer Doppelkreuzung

In nebenstehender Abbildung heißen:

Stufenwinkel	α und ε, β und φ γ und μ, δ und σ
Nachbarwinkel	α und σ, β und μ
Wechselwinkel oder Z-Winkel	α und μ, β und σ

Zwei Geraden g und h einer Ebene heißen *parallel*, wenn sie keinen Schnittpunkt haben oder gleich sind.

$$\boxed{g \| h \quad \iff \quad g \cap h = \{\} \text{ oder } g = h}$$

Mit den Kongruenzsätzen kann man beweisen:

> Werden zwei verschiedene Geraden g und h von einer dritten Geraden geschnitten und sind zwei Stufenwinkel gleich, dann ist g parallel zu h.

Die Umkehrung dieses Satzes ist mit den bisherigen Axiomen nicht beweisbar. Daher postulierte schon Euklid (365-300v.Chr.) das Axiom:

> Werden zwei verschiedene parallele Geraden g und h von einer dritten Geraden geschnitten, dann sind Stufenwinkel gleich. (**Parallelenaxiom**)

Aus dem Parallelenaxiom folgt:

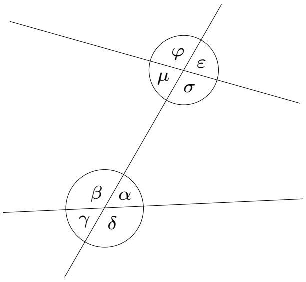
> Zu P $\notin g$ gibt es genau eine Gerade h mit
> $$h \| g \text{ und } \mathrm{P} \in h$$

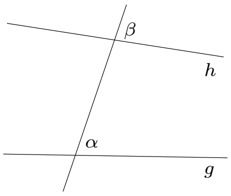
> Werden zwei verschiedene Geraden g und h von einer dritten Geraden geschnitten, dann gilt:
>
> g und h sind parallel genau dann, wenn
>
> - Stufenwinkel gleich sind
> - Z-Winkel (Wechselwinkel) gleich sind
> - Nachbarwinkel sich zu 180° ergänzen.

Parallelen konstruiert man durch Winkelübertragung unter Ausnutzung des Z-Winkel- oder Stufenwinkelsatzes.

Spezialfall des Stufenwinkelsatzes:
Zwei Geraden sind parallel, wenn beide auf einer dritten Geraden senkrecht stehen.

Beispiele





Beweisbar:

$$\boxed{\alpha = \beta \quad \Longrightarrow \quad g \| h}$$

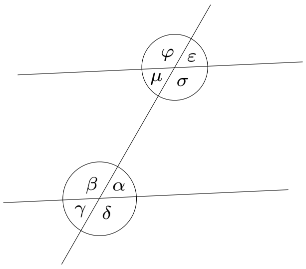
Nicht beweisbar:

$$\boxed{g \| h \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \beta}$$

(Parallelenaxiom)

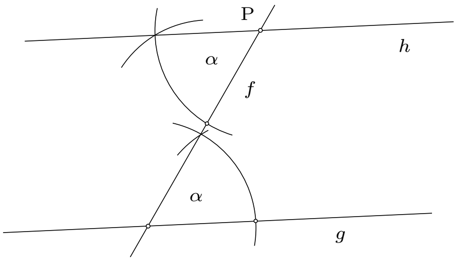
Zusammenfassend:

$$\boxed{\alpha = \beta \quad \iff \quad g \| h}$$



$$\begin{aligned} g \| h &\iff \alpha = \varepsilon \text{ oder } \gamma = \mu \text{ oder ...} \\ &\iff \alpha = \mu \text{ oder } \beta = \sigma \\ &\iff \alpha + \sigma = 180^\circ \text{ oder } \beta + \mu = 180^\circ \end{aligned}$$

Konstruktion der Parallelen zu g durch P:



Definitionen und Regeln

Dreiecke

Winkelsumme im Dreieck

Aus dem Z-Winkelsatz folgt, dass α, β und γ zusammen einen gestreckten Winkel ergeben:

> Die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks ist 180°.

Die Nebenwinkel der Innenwinkel eines Dreiecks heißen *Außenwinkel*.

In nebenstehender Abbildung sind α', β' und γ' Außenwinkel.

> Ein Außenwinkel im Dreieck ist gleich der Summe der nichtanliegenden Innenwinkel. (**Außenwinkelsatz**)

$$\alpha' = \beta + \gamma, \quad \beta' = \alpha + \gamma, \quad \gamma' = \alpha + \beta$$

> Die Summe der Innenwinkel eines n-Ecks ist $S_n = (n - 2) \cdot 180°$.

Kennt man in einem Dreieck eine Seite und zwei beliebige Winkel, dann kennt man wegen der Winkelsumme auch den dritten Winkel. Somit sind die beiden der Seite anliegenden Winkel bekannt. Es gilt also ein weiterer Kongruenzsatz:

> Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in einer Seite und zwei entsprechenden Winkeln übereinstimmen. (wws)

Besondere Linien im Dreieck

Das Lot von einer Ecke eines Dreiecks auf die gegenüberligende Seite heißt *Höhe*. Ist $\mathrm{F_C}$ der Fusspunkt des Lotes von C auf AB, dann ist $h_c = [\mathrm{CF_C}]$ die zu C gehörende Höhe.

$$h_a = [\mathrm{AF_A}], \quad h_b = [\mathrm{BF_B}], \quad h_c = [\mathrm{CF_C}]$$

Die Höhen (bzw. ihre Verlängerungen) schneiden sich in einem Punkt.

$\mathrm{M_A}$, $\mathrm{M_B}$ und $\mathrm{M_C}$ sind die Mittelpunkte der Dreiecksseiten. *Seitenhalbierende*:

$$s_a = [\mathrm{AM_A}], \quad s_b = [\mathrm{BM_B}], \quad s_c = [\mathrm{CM_C}]$$

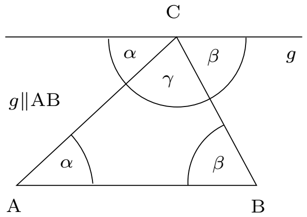
Die Seitenhalbierenden schneiden sich in einem Punkt.

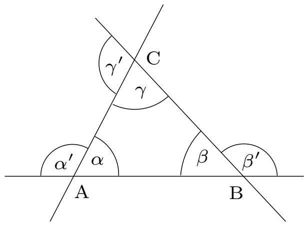
Die Mittelsenkrechten m_a, m_b und m_c schneiden sich in einem Punkt, dem *Umkreismittelpunkt* des Dreiecks.

Winkelhalbierende:

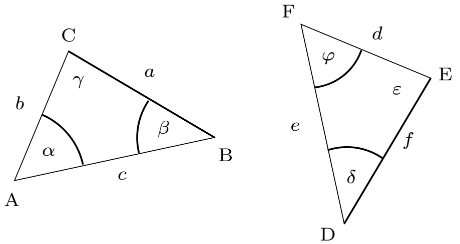
$$w_\alpha = [\mathrm{AW_A}], \quad w_\beta = [\mathrm{BW_B}], \quad w_\gamma = [\mathrm{CW_C}],$$

Beispiele

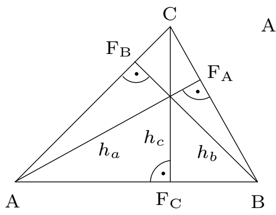


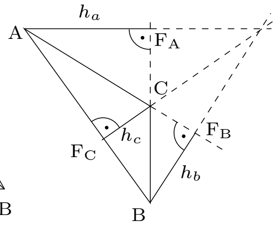


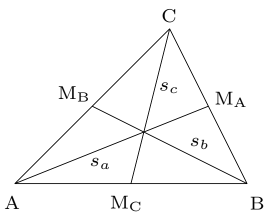
n	3	4	5	12	100
S_n	180°	360°	540°	1800°	17640°

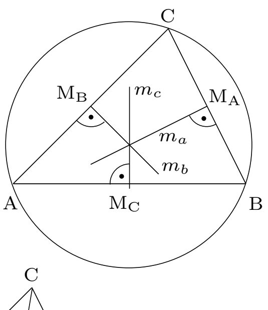


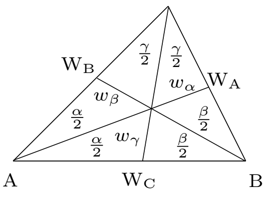
$$\left.\begin{array}{l} a = f \\ \alpha = \varphi \\ \beta = \delta \end{array}\right\} \implies \triangle\mathrm{ABC} \cong \triangle\mathrm{FDE}$$











Definitionen und Regeln | **Beispiele**

Das gleichschenklige Dreieck

Ein Dreieck mit zwei gleich langen Seiten heißt *gleichschenklig.* Die beiden gleich langen Seiten sind die *Schenkel*, die dritte Seite ist die *Basis.* Die der Basis gegenüberliegende Ecke heißt *Spitze* des gleichschenkligen Dreiecks.

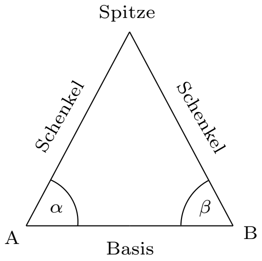
Im gleichschenkigen Dreieck sind die Basiswinkel gleich.

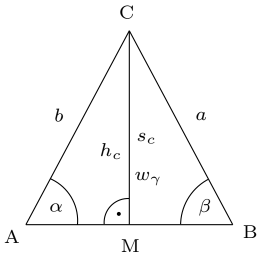
Es gilt auch die Umkehrung:

Ein Dreieck mit zwei gleichen Winkeln ist gleichschenklig.

Zusammengefasst:

$$\boxed{a = b \iff \alpha = \beta}$$





Im gleichschenkligen Dreieck fallen die Höhe zur Basis, die Seitenhalbierende der Basis und die Winkelhalbierende des Winkels an der Spitze zusammen.

$$a = b \iff h_c = s_c = w_\gamma$$

Das gleichseitige Dreieck

Ein Dreieck mit drei gleich langen Seiten heißt *gleichseitig.* Im gleichseitigen Dreieck ist jede Seite Basis eines gleichschenkligen Dreiecks, d.h. je zwei Winkel sind gleich. Somit sind alle drei Winkel gleich.

Im gleichseitigen Dreieck sind alle Innenwinkel gleich 60°.

Im gleichseitigen Dreieck fallen alle entsprechenden Höhen, Seiten- und Winkelhalbierenden zusammen.

Durch Konstruktion eines gleichseitigen Dreiecks kann man einen 60°-Winkel konstruieren. Durch fortgesetzte Winkelhalbierung und Winkelübertragungen ergibt sich:

Jeder Winkel der Form

$$\alpha = \frac{m}{2^n} \cdot 60^\circ$$

mit ganzen Zahlen m und n ist konstruierbar.

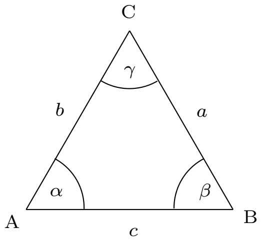
Spezialfall: $90^\circ = \dfrac{3}{2^1} \cdot 60^\circ$

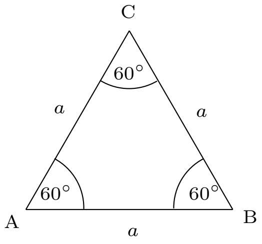
Sind α und β konstruierbar, dann ist auch

$$\gamma = \frac{m}{2^n} \cdot \alpha + \frac{r}{2^s} \cdot \beta$$

mit ganzen Zahlen m, n, r und s konstruierbar.

Mit Methoden, die wir später kennen lernen, kann man auch den 72°-Winkel und viele andere Winkel konstruieren.



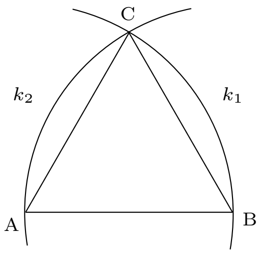


$$a = b = c \iff \alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$$

Konstruktion eines gleichseitigen Dreiecks △ABC, wenn [AB] gegeben ist:

$k_1 = \mathrm{k}(\mathrm{A}; r = \overline{\mathrm{AB}})$

$k_2 = \mathrm{k}(\mathrm{B}; r = \overline{\mathrm{AB}})$



Beispiele für konstruierbare Winkel:

$$30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ, \quad 15^\circ = \frac{1}{2^2} \cdot 60^\circ, \quad 7{,}5^\circ = \frac{1}{2^3} \cdot 60^\circ$$

$$75^\circ = 60^\circ + \frac{1}{2^2} \cdot 60^\circ = \frac{5}{2^2} \cdot 60^\circ$$

$$97{,}5^\circ = 90^\circ + \frac{1}{2^3} \cdot 60^\circ = \frac{13}{2^3} \cdot 60^\circ$$

$$4{,}5^\circ = \frac{1}{2^4} \cdot 72^\circ$$

$$3^\circ = \frac{1}{2^3} \cdot 60^\circ - \frac{1}{2^4} \cdot 72^\circ$$

Nicht konstruierbar sind z.B. die folgenden Winkel:

1°, 10°, 20°, 40° und 80°.

Definitionen und Regeln

Lagebeziehungen im Dreieck

In einem Dreieck liegt dem größeren Winkel die gröere Seite gegenüber und umgekehrt.

$$b < c \iff \beta < \gamma$$

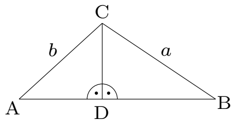
Da im rechtwinkligen Dreieck der rechte Winkel der gröte Winkel ist, folgt:

Im rechtwinkligen Dreieck liegt dem rechten Winkel die größte Seite gegenüber.

$\overline{\text{AD}} < b$ und $\overline{\text{DB}} < a$

$$c = \overline{\text{AB}} = \underbrace{\overline{\text{AD}}}_{<b} + \underbrace{\overline{\text{DB}}}_{<a}$$

$$\Longrightarrow \quad c < a + b$$



In einem Dreieck ist die Summe zweier Seiten größer als die dritte Seite.

In einem Dreieck ist der Betrag der Differenz zweier Seiten kleiner als die dritte Seite.

Die Strecke [AB] ist die kürzeste Verbindung zwischen A und B.

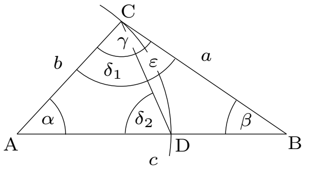
Beispiele

$\triangle$ABC mit $b < c$:

$\overline{AD} = b \Rightarrow \delta_1 = \delta_2$

Außenwinkelsatz

$\Longrightarrow \quad \delta_2 = \beta + \varepsilon$



$$\beta = \delta_2 - \varepsilon = \delta_1 - \varepsilon = (\gamma - \varepsilon) - \varepsilon = \gamma - 2\varepsilon < \gamma$$

Damit ist bewiesen: $b < c \quad \Longrightarrow \quad \beta < \gamma$

Jetzt sei $\beta < \gamma$ gegeben. Es gibt drei Möglichkeiten:

1. $b > c \quad \Longrightarrow \quad \beta > \gamma$ (Widerspruch)
2. $b = c \quad \Longrightarrow \quad \beta > \gamma$ (Widerspruch)
3. $b < c \quad \Longrightarrow \quad \beta < \gamma$ (kein Widerspruch)

Damit ist bewiesen: $\beta < \gamma \quad \Longrightarrow \quad b < c$

Beispiel: $\triangle$ABC mit $\alpha = 70°$, $\beta = 80°$, $\gamma = 30°$

$$\Longrightarrow \quad \gamma < \alpha < \beta \quad \Longrightarrow \quad c < a < b$$

Im $\triangle$ABC gilt:

$$\left.\begin{array}{lcl} b + c > a & \Longrightarrow & a - b > c \\ a + c > b & \Longrightarrow & a - b > -c \end{array}\right\} \Longrightarrow |a - b| < c$$

Beispiel: Es gibt kein Dreieck $\triangle$ABC mit $a = 10$, $b = 7$ und $c = 2$, da $|a - b| = 3 > 2 = c$.

Der Abstand

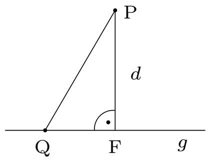
P ist ein Punkt, der nicht auf der Geraden g liegt und F ist der Fußpunkt des Lotes von P auf g. Weiter ist Q ein beliebiger Punkt auf g, der nicht gleich F ist:

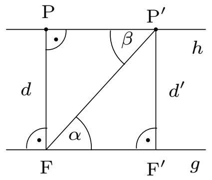
$$\Longrightarrow \quad \overline{\text{PQ}} > \overline{\text{PF}}$$

Die Länge $\overline{\text{PF}}$ des Lotes von P auf g ist die kürzeste Verbindung zwischen P und irgend einem Punkt auf g. $\overline{\text{PF}}$ heißt *Abstand* des Punktes P von g:

$$d(\text{P}; g) = \overline{\text{PF}}$$

Jeder Punkt P einer Geraden h hat zu einer dazu parallelen Geraden g den gleichen Abstand d. d heißt Abstand der parallelen Geraden.





$$\left.\begin{array}{rcl} \overline{\text{FP'}} = \overline{\text{FP'}} & & \\ \alpha = \beta & & \text{(Z-Winkel)} \\ 90° = 90° & & \text{(Abstand)} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Longrightarrow \triangle\text{FP}'\text{P} \cong \triangle\text{P}'\text{FF}' \\ \Longrightarrow d = d' \end{array}$$

Zum Sprachgebrauch:

Eine *Entfernung* gibt es zwischen zwei Punkten, einen *Abstand* gibt es zwischen einem Punkt und einer Geraden oder zwischen zwei Parallelen.

Definitionen und Regeln | **Beispiele**

Der Thaleskreis

Ist M der Mittelpunkt der Strecke [AB], dann heißt der Kreis um M mit Radius $r = \frac{\overline{AB}}{2}$ *Thaleskreis* über [AB]. Mit TK_{AB} bezeichnen wir den Thaleskreis ohne die Endpunkte der Strecke:

$$TK_{AB} = k\left(M; r = \frac{\overline{AB}}{2}\right) \setminus \{A;B\}$$

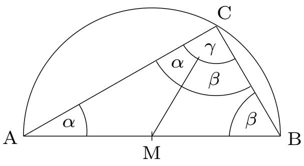
Damit gilt der Satz des THALES:

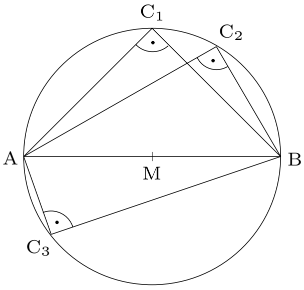
In einem Dreieck △ABC gilt

$$\gamma = 90^\circ \quad \Longleftrightarrow \quad C \in TK_{AB}$$

$2\alpha + 2\beta = 180^\circ$

$\gamma = \alpha + \beta = 90^\circ$





Symmetrie

Achsensymmetrie und Achsenspiegelung

a ist eine Gerade, die *Symmetrieachse.*

P und P′ heißen symmetrisch bezüglich der Achse a, wenn a die Mittelsenkrechte auf [PP′] ist.

P geht durch die *Achsenspiegelung* an a in P′ über.
P′ ist der *Spiegelpunkt* von P bezüglich a und umgekehrt:

$$P \overset{a}{\longleftrightarrow} P'$$

Konstruktion des Spiegelpunktes P′ von P:

Man wählt zwei Punkte $A \in a$ und $B \in a$.

$k_1 = k(A; r = \overline{AP})$

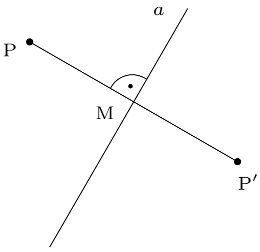
$k_2 = k(B; r = \overline{BP})$

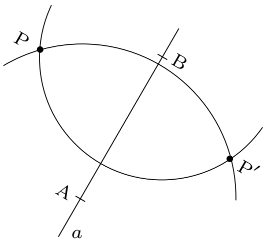
$k_1 \cap k_2 = \{P, P'\}$

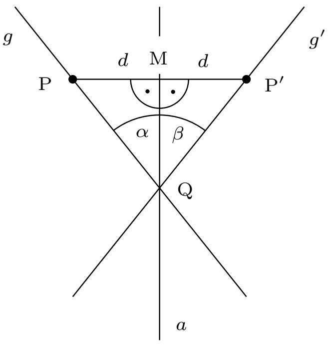
Achsenpunkte und nur diese sind zu sich selbst symmetrisch (*Fixpunkte*):

$$P \overset{a}{\longleftrightarrow} P \quad \Longleftrightarrow \quad P \in a$$

Spiegelt man alle Punkte einer Geraden g an einer Achse a, dann bilden die Bildpunkte wieder eine Gerade, die Bildgerade g'. g und g' schneiden a unter dem gleichen Winkel.







$$\left.\begin{array}{r}\overline{QM}=\overline{QM}\\ \overline{PM}=\overline{MP'}\\ 90^\circ=90^\circ\end{array}\right\}\begin{array}{l}\overset{(sws)}{\Longrightarrow}\triangle PMQ\cong\triangle P'MQ\\ \Longrightarrow \alpha=\beta\end{array}$$

Definitionen und Regeln | **Beispiele**

Die Strecke [PQ] wird an der Achse a gespiegelt, ihr Bild ist [P′Q′].

$$\left.\begin{array}{r}\overline{\mathrm{MN}}=\overline{\mathrm{MN}}\\ \overline{\mathrm{PM}}=\overline{\mathrm{MP'}}\\ 90^\circ=90^\circ\end{array}\right\}\begin{array}{l}\overset{\text{(sws)}}{\Longrightarrow}\ \triangle\mathrm{PMN}\cong\triangle\mathrm{P'MN}\\ \Longrightarrow\gamma=\delta\Longrightarrow\alpha=\beta\\ \text{und }\overline{\mathrm{PN}}=\overline{\mathrm{NP'}}\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r}\overline{\mathrm{QN}}=\overline{\mathrm{NQ'}}\\ \overline{\mathrm{PN}}=\overline{\mathrm{NP'}}\\ \alpha=\beta\end{array}\right\}\begin{array}{l}\overset{\text{(sws)}}{\Longrightarrow}\ \triangle\mathrm{PNQ}\cong\triangle\mathrm{P'NQ'}\\ \Longrightarrow\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{P'Q'}}\end{array}$$

Damit ist bewiesen:

Die Achsenspiegelung ist *längentreu*, d.h. eine Strecke geht bei der Achsenspiegelung in eine gleich lange Strecke über.

Aus dem Kongruenzsatz (sss) folgt dann:

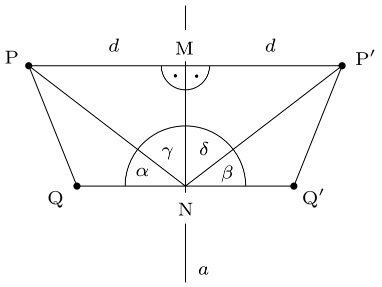
Bei der Achsenspiegelung geht ein Dreieck in ein dazu kongruentes Dreieck über. Dabei ändert sich der Umlaufsinn.

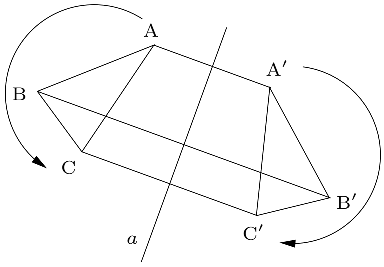
Allgemein gilt:

Bei der Achsenspiegelung geht eine geometrische Figur in eine dazu kongruente Figur über. Die Achsenspiegelung ist daher eine *Kongruenzabbildung*.

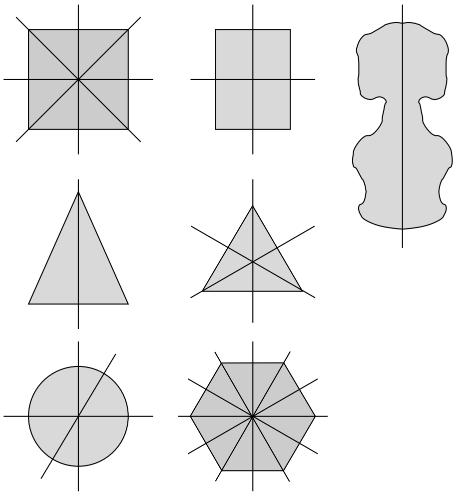
Eine Figur heißt *achsensymmetrisch*, wenn es eine Achsenspiegelung gibt, die die Figur in sich selbst überführt.

Figur	Zahl der Achsen
Rechteck	2
gleichseitiges Dreieck	3
Quadrat	4
regelmäßiges n-Eck	n
Kreis	unendlich viele





Beispiele achsensymmetrischer Figuren mit ihren Symmetrieachsen:



Punktsymmetrie und Punktspiegelung

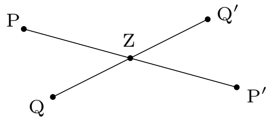
Z ist ein Punkt, das *Symmetriezentrum*.

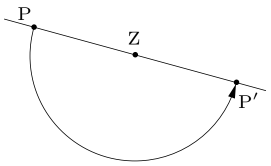
P und P′ heißen symmetrisch bezüglich des Punktes Z, wenn Z der Mittelpunkt der Strecke [PP′] ist.

P geht durch die *Punktspiegelung* an Z in P′ über. P′ ist der *Spiegelpunkt* von P bezüglich Z und umgekehrt:

$$\mathrm{P}\xleftrightarrow{\mathrm{Z}}\mathrm{P'}$$

Die Punktspiegelung an Z ist identisch mit einer Drehung um Z um 180°.





Definitionen und Regeln

Konstruktion des Spiegelpunktes P′ von P:

Man zeichnet die Gerade PZ und den Kreis $k = \mathrm{k}(Z; r = \overline{\mathrm{ZP}})$

$k \cap \mathrm{PZ} = \{\mathrm{P}, \mathrm{P}'\}$

Nur das Zentrum ist zu sich selbst symmetrisch (*Fixpunkt*):

$$\mathrm{P} \xleftrightarrow{\mathrm{Z}} \mathrm{P} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{P} = \mathrm{Z}$$

Spiegelt man alle Punkte einer Geraden g an einem Zentrum Z, dann bilden die Bildpunkte wieder eine Gerade, die Bildgerade g'. g und g' sind parallel.

Die Punktspiegelung ist *längentreu*, d.h. eine Strecke geht bei der Punktspiegelung in eine gleich lange Strecke über.

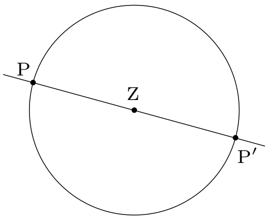
Bei der Punktspiegelung geht eine geometrische Figur in eine dazu kongruente Figur über. Die Punktspiegelung ist daher eine *Kongruenzabbildung*. Der Umlaufsinn bleibt erhalten.

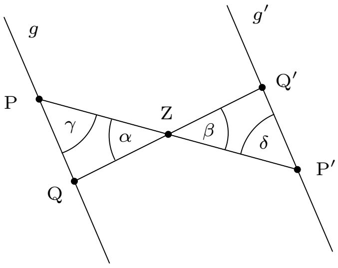
Eine Figur heißt *punktsymmetrisch*, wenn es eine Punktspiegelung gibt, die die Figur in sich selbst überführt.

Beispiele punktsymmetrischer Figuren:

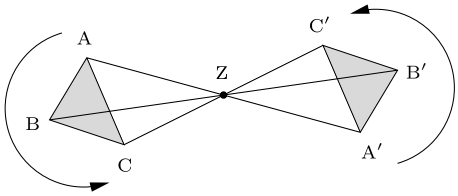
- Parallelogramm
- Rechteck
- Quadrat
- Kreis
- regelmäßiges n-Eck, wenn n gerade ist

Beispiele

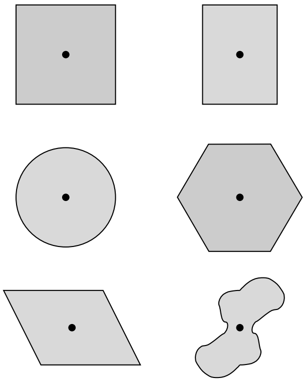




$$\left.\begin{array}{r}\overline{\mathrm{QZ}} = \overline{\mathrm{ZQ'}}\\ \overline{\mathrm{PZ}} = \overline{\mathrm{ZP'}}\\ \alpha = \beta\,\text{(Z-Winkel)}\end{array}\right\} \begin{array}{l}\overset{\text{(sws)}}{\Longrightarrow} \triangle\mathrm{PQZ} \cong \triangle\mathrm{P'Q'Z}\\ \Longrightarrow \gamma = \delta \Longrightarrow g \| g'\\ \text{und } \overline{\mathrm{PQ}} = \overline{\mathrm{P'Q'}}\end{array}$$



Beispiele punktsymmetrischer Figuren mit ihren Symmetriezentren:



Grundwissen Mathematik – Jahrgangsstufe 8

Algebra

Definitionen und Regeln

Funktionen

Relation und Funktion

Unter einem *Zahlenpaar* verstehen wir ein geordnetes Paar von rationalen Zahlen. Geordnet bedeutet, dass z.B. $(1|2) \neq (2|1)$.
Jedes Zahlenpaar $(a|b)$ kann als Punkt $P(a|b)$ in einem Koordinatensystem dargestellt werden.

> Eine *Relation* ist eine Menge von Zahlenpaaren.

f sei eine Relation, d.h. eine Menge von Zahlenpaaren. Die Menge aller **linken** (ersten) Zahlen der Elemente von f heißt **Definitionsmenge** D_f der Relation f, die Menge aller **rechten** (zweiten) Zahlen dagegen nennt man die **Wertemenge** W_f.
Die beiden Zahlen eines Wertepaares kann man als Koordinaten eines Punktes deuten (linke Zahl = Rechtswert, x-Wert oder **Abszisse**, rechte Zahl = Hochwert, y-Wert oder **Ordinate**). Die waagrechte Achse eines Koordinatensystems nennt man die **Rechtsachse** oder **Abszissenachse**, die senkrechte Achse heißt **Hochachse** oder **Ordinatenachse**. Zeichnet man alle Punkte einer Relation in ein Koordinatensystem, so erhält man den **Grafen** G_f der Relation. Da die Relation f eine Menge ist, stellt man die Zugehörigkeit eines Wertepaares zu f mit dem Elementzeichen dar: $(x|y) \in f$. Der Graf von f ist die Punktmenge

$$\mathrm{G}_f = \{P(x|y) \,|\, (x|y) \in f\}$$

Eine Relation f heißt *eindeutig*, wenn

$$(x, y_1) \in f \text{ und } (x, y_2) \in f \quad \Longrightarrow \quad y_1 = y_2$$

d.h. wenn es zu jedem x-Wert nur *einen* y-Wert gibt.

> Eine eindeutige Relation heißt *Funktion.*

Eine Funktion mit einer endlichen Definitionsmenge kann man durch Angabe aller Wertepaare hinschreiben. Bei einer Funktion mit einer unendlichen Definitionsmenge ist das nicht möglich. In diesem Fall gibt man den *Funktionsterm* $f(x)$ bzw. die *Funktionsgleichung* $y = f(x)$ an.

Beispiele

Als Beispiel betrachten wir die Relation

$$f = \{\, (x|y) \,|\, x = y^2 \text{ und } x \in D_f \}$$

mit der Definitionsmenge $D_f = \{\, 0\,;\, 1\,;\, 2{,}25\,;\, 4 \,\}$

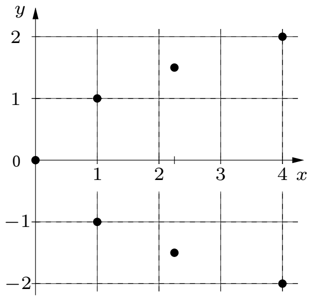
Wertetabelle:

x	0	1	1	2,25	2,25	4	4
y	0	1	−1	1,5	−1,5	2	−2

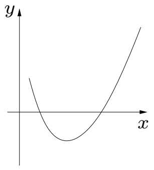
Die Wertemenge ist

$$W_f = \{\, 0\,;\, 1;\, -1\,;\, 1{,}5\,;\, -1{,}5\,;\, 2;\, -2 \,\}$$

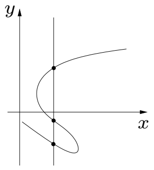
Der Graf der Relation f:



Man sieht, dass zu jedem x-Wert (außer 0) zwei y-Werte gehören. f ist also nicht eindeutig und somit keine Funktion.



Funktion



keine Funktion

> Schneidet eine Parallele zur y-Achse den Grafen einer Relation f mehr als einmal, dann ist f keine Funktion.

Die Menge aller Zahlenpaare, die man aus rationalen Zahlen bilden kann, nennt man $\mathbb{Q}^2$:

$$\boxed{\mathbb{Q}^2 = \{(x|y) \,|\, x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}\}}$$

Definitionen und Regeln

Der Funktionsterm $f(x)$ ist eine Rechenvorschrift, mit der man zu jedem $x \in D_f$ den dazugehörenden y-Wert berechnen kann:

$$\boxed{y = f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad (x|y) \in f}$$

Durch Angabe der Funktionsgleichung $y = f(x)$ und der Definitionsmenge D_f ist eine Funktion f eindeutig bestimmt.
Folgende Schreibweisen sind gleichbedeutend:

$$f = \{(x|y)\,|\,y = f(x) \text{ und } x \in D_f\}$$

$$f = \{(x|f(x))\,|\,x \in D_f\}$$

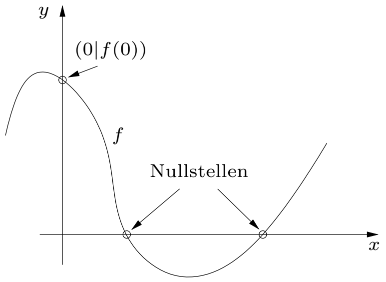
$$\mathrm{G}_f = \{P(x|f(x))\,|\,x \in D_f\}$$

$$f:\ x \to y = f(x), \quad x \in D_f$$

Die letzte Schreibweise liest man so: Die Funktion f ordnet jedem $x \in D_f$ den Wert $y = f(x)$ zu.

Ist $0 \in D_f$, dann hat der Graf von f genau einen Schnittpunkt mit der y-Achse, nämlich $(0, f(0))$.

Die Schnittpunkte des Grafen von f mit der x-Achse heißen *Nullstellen* von f. Die x-Werte der Nullstellen findet man durch das Lösen der Gleichung $f(x) = 0$.



Ist keine Definitionsmenge einer Funktion angegeben, verwendet man die maximal mögliche Definitionsmenge, bei uns also $\mathbb{Q}$. Einschränkungen der maximalen Definitionsmenge gibt es, wenn der Funktionsterm Brüche enthält, in deren Nennern die Variable x vorkommt. Die maximale Definitionsmenge ist dann $\mathbb{Q}$ ohne die Nullstellen der Nenner:

$$D_{f,\max} = \mathbb{Q} \setminus \{\text{Nullstellen der Nenner}\}$$

Beispiel: $f(x) = \dfrac{\frac{x}{3-x} + 1}{3x - 5} + \dfrac{5x - 4}{2x + 7}$

Nullstellen der Nenner suchen:

$3 - x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 3$

$3x - 5 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_2 = \frac{5}{3}$

$2x + 7 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_3 = -\frac{7}{2}$

$D_{f,\max} = \mathbb{Q} \setminus \{-\frac{7}{2}, \frac{5}{3}, 3\}$

Beispiele

Für das Anschreiben von Definitions- oder Wertemengen benötigt man oft den Begriff des Intervalls:

Geschlossenes Intervall:

$$[a;b] = \{x\,|\,a \leqq x \leqq b\}$$

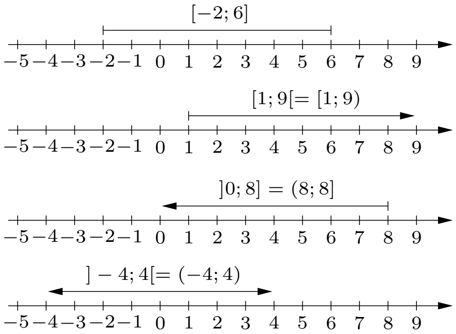
Offenes Intervall:

$$]a;b[= \{x\,|\,a < x < b\}$$

Halboffene Intervalle:

$$[a;b[= [a;b) = \{x\,|\,a \leqq x < b\}$$

$$]a;b] = (a;b] = \{x\,|\,a < x \leqq b\}$$



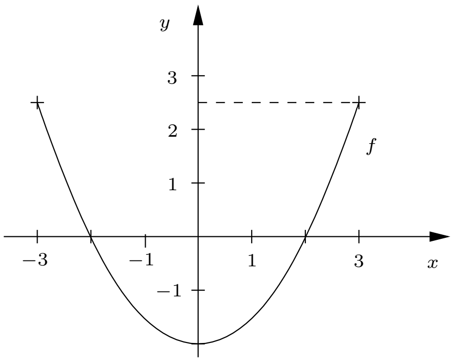
Beispiel:

$y = f(x) = \frac{1}{2}\,x^2 - 2,\ D_f = [-3, 3]$

Wertetabelle:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	2,5	0	−1,5	−2	−1,5	0	2,5

Der Wertetabelle entnimmt man die Nullstellen $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$. Der Schnittpunkt des Grafen mit der y-Achse ist $(0|-2)$.



Dem Grafen und der Wertetabelle entnimmt man die Wertemenge $W_f = [-2; 2{,}5]]$.

Definitionen und Regeln | **Beispiele**

Die lineare (affine) Funktion

Eine Funktion mit dem Term

$$f(x) = ax + b$$

mit Konstanten a und b heißt *lineare* oder *affine* Funktion.

Der Graf der linearen Funktion mit dem Term $f(x) = ax + b$ ist eine Gerade, die die y-Achse wegen $f(0) = b$ im Punkt $(0|b)$ schneidet.

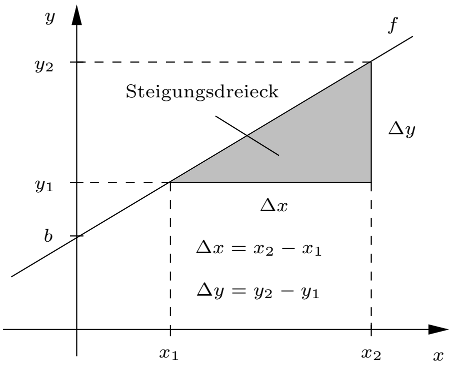
Die *Steigung* einer Geraden ist über das Steigungsdreieck definiert:

$$\text{Steigung} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Wegen $\Delta y = a \cdot \Delta x$ (siehe rechts) gilt

$$\boxed{\text{Steigung} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = a}$$

Der Graf der linearen Funktion mit dem Term $f(x) = ax+b$ ist eine Gerade mit der Steigung a und dem Abschnitt b auf der y-Achse.



Änderung der unabhängigen Variablen x:

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

Änderung der Funktionswerte:

$$\begin{aligned}\Delta y &= y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1 = \\ &= ax_2 + b - (ax_1 + b) = \\ &= ax_2 + b - ax_1 - b = a(x_2 - x_1)\end{aligned}$$

$$\boxed{\Delta y = a \cdot \Delta x}$$

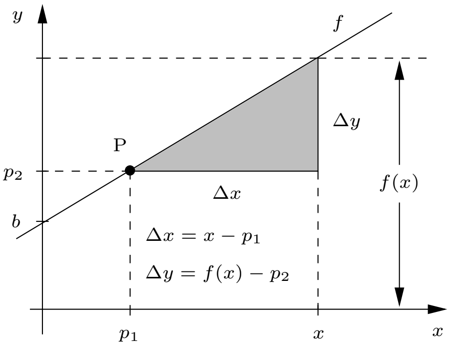
Überprüfen, ob der Punkt $\mathrm{P}(p_1|p_2)$ auf dem Grafen von f liegt:
Einfach $f(p_2)$ berechnen und mit p_1 vergleichen.

$f(x) = 2x - 3, \quad \mathrm{A}(3|4), \quad \mathrm{B}(-1|-5)$

$f(3) = 3 \neq 4 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{A} \notin \mathrm{G}_f$

$f(-1) = -5 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{B} \in \mathrm{G}_f$

Gerade durch den Punkt $\mathrm{P}(p_1|p_2)$ mit der Steigung a:



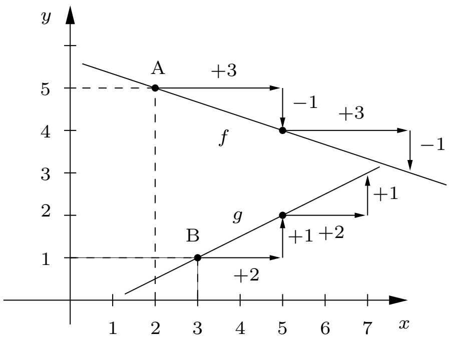
$$f(x) = p_2 + \Delta y = p_2 + a\Delta x = p_2 + a(x - p_1)$$

$$\boxed{f(x) = p_2 + a(x - p_1) = ax + \underbrace{p_2 - ap_1}_{b}}$$

Alternativ kann man b durch Einsetzen der Koordinaten von P in die Funktionsgleichung berechnen:

$$f(p_1) = ap_1 + b = p_2 \quad \Longrightarrow \quad b = p_2 - ap_1$$

Der Graf von f geht durch $\mathrm{A}(2|5)$ und hat die Steigung $a_f = -\frac{1}{3}$: Zu $\Delta x = 3$ gehört $\Delta y = -1$
Der Graf von g geht durch $\mathrm{B}(3|1)$ und hat die Steigung $a_g = \frac{1}{2}$: Zu $\Delta x = 2$ gehört $\Delta y = 1$



$f(x) = 5 - \frac{1}{3}(x - 2) = -\frac{1}{3}x + \frac{17}{3}$

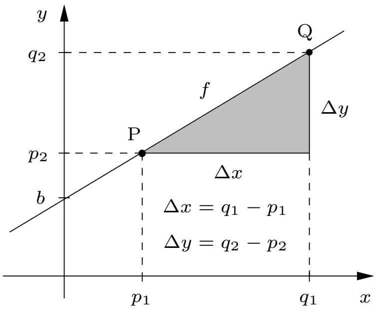
$g(x) = \frac{1}{2}x + b$

$\mathrm{B} \in \mathrm{G}_f \implies g(3) = \frac{3}{2} + b = 1 \implies b = -\frac{1}{2}$

$$g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

Definitionen und Regeln

Gerade durch die Punkte $\mathrm{P}(p_1|p_2)$ und $\mathrm{Q}(q_1|q_2)$:

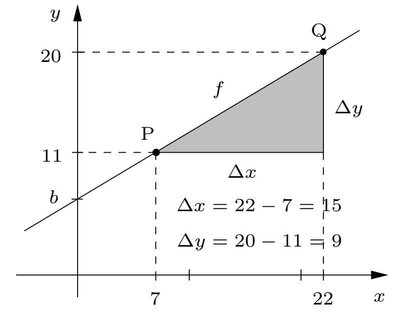


Die Steigung der Geraden ist

$$a = \frac{q_2 - p_2}{q_1 - p_1}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= p_2 + a(x - p_1) = \\ &= p_2 + \frac{q_2 - p_2}{q_1 - p_1} \cdot (x - p_1) \\ &= \frac{q_2 - p_2}{q_1 - p_1} \cdot x + \underbrace{p_2 - \frac{(q_2 - p_2)p_1}{q_1 - p_1}}_{b} \end{aligned}$$

Beispiele



Gerade durch die Punkte P(7|11) und Q(22|20):

Die Steigung der Geraden ist

$$a = \frac{20 - 11}{22 - 7} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

$$f(x) = 11 + \frac{3}{5}(x - 7) = \frac{3}{5}x + \frac{34}{5}$$

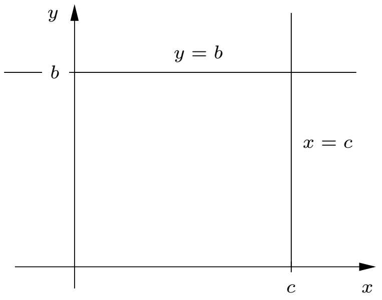
$$f(x) = 0{,}6\,x + 6{,}8$$

Spezielle Geraden:

Der Graf der Funktion $y = f(x) = b$ (Steigung 0) ist eine Parallele zur x-Achse durch den Punkt $(0|b)$.

Eine Parallele zur y-Achse durch den Punkt $(c|0)$ ist kein Graf einer Funktion, sondern der Relation

$$f = \{(x|y)\,|\,x = c \text{ und } y \text{ beliebig}\}$$



Schnittpunkt von zwei Geraden:

Gesucht ist der Schnittpunkt $\mathrm{S}(x_\mathrm{S}|y_\mathrm{S})$ der beiden Geraden mit den Gleichungen

$$f(x) = ax + b \text{ und } g(x) = cx + d$$

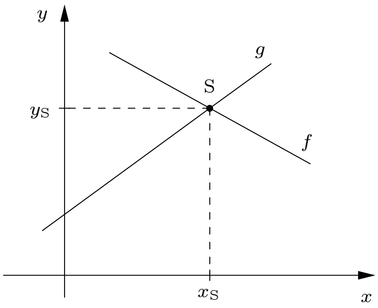
Gleichsetzen der Funktionsterme:

$$f(x_\mathrm{S}) = g(x_\mathrm{S}) \quad\Longrightarrow\quad ax_\mathrm{S} + b = cx_\mathrm{S} + d$$

Für $a \neq c$ folgt

$$x_\mathrm{S} = \frac{d - b}{a - c}, \quad y_\mathrm{S} = f(x_\mathrm{S}) = \frac{ad - bc}{a - c}$$

Kein Schnittpunkt für $a = c$ und $b \neq d$, für $a = c$ und $b = d$ fallen die beiden Geraden zusammen.



Beispiel: $f(x) = 2x - 4$ und $g(x) = -x + 5$

$2x_\mathrm{S} - 4 = -x_\mathrm{S} + 5 \;\Longrightarrow\; x_\mathrm{S} = 3$
$y_\mathrm{S} = f(3) = g(3) = 2 \;\Longrightarrow\;$ S(3|2)

Definitionen und Regeln | **Beispiele**

Die Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit

Ein Körper bewegt sich mit der konstanten Geschwindigkeit v und befindet sich zur Zeit $t = 0$ am Ort x_0. Dann ist der Ort x des Körpers zur Zeit t eine lineare Funktion der Zeit:

$$\boxed{x(t) = x_0 + vt}$$

Der Graf der Funktion x (das tx-Diagramm) ist eine Gerade mit der Steigung v und dem Abschnitt x_0 auf der x-Achse (Ordinate).

Ist von einer Bewegung die konstante Geschwindigkeit v und der Startort x_1 zur Zeit t_1 bekannt ($x_1 = x(t_1)$), dann ist der Ort zur Zeit t:

$$\boxed{x(t) = x_1 + v(t - t_1)}$$

oder

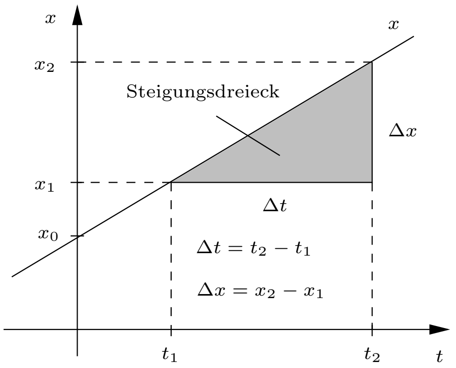
$$x(t) = \underbrace{x_1 - vt_1}_{x_0} + vt$$

Mit $\Delta t = t_2 - t_1$ und dem dazugehörenden

$$\begin{aligned}\Delta x &= x_2 - x_1 = x(t_2) - x(t_1) = \\ &= x_0 + vt_2 - (x_0 + vt_1) = \\ &= v(t_2 - t_1) = v \cdot \Delta t\end{aligned}$$

findet man

$$\boxed{v = \frac{\Delta x}{\Delta t}}$$



Beispiel: Ein PKW wird auf der Autobahn zur Zeit $t_1 = 5\,\mathrm{h}$ bei $x_1 = 30\,\mathrm{km}$ mit der Geschwindigkeit $v = 120\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ geblitzt. Unter der Annahme einer konstanten Geschwindigkeit ist seine Ortsfunktion:

$$\begin{aligned}x(t) &= 30\,\mathrm{km} + 120\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \cdot (t - 5\,\mathrm{h}) = \\ &= -570\,\mathrm{km} + 120\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \cdot t\end{aligned}$$

Zu welcher Zeit t_0 war er am Beginn der Autobahn bei $x_0 = 0$?

$$x(t_0) = -570\,\mathrm{km} + 120\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \cdot t_0 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad t_0 = 4{,}75\,\mathrm{h} \quad \text{d.h. um 04:45:00 Uhr}$$

Direkte Proportionalität

Zwei Größen y und x heißen *direkt proportional* zueinander ($y \sim x$), wenn der Quotient von zwei zusammengehörenden Werten konstant ist:

$$\boxed{\frac{y}{x} = k = \text{konstant}}$$

k heißt *Proportionalitätskonstante.*

Ist y proportional zu x, dann ist

$$y = f(x) = kx$$

eine lineare Funktion mit der Steigung k und $f(0) = 0$. Der Graf dieser Funktion ist eine Gerade durch den Ursprung.

Eine Wertetabelle zweier Größen prüft man durch Quotientenbildung der Wertepaare auf direkte Proportionalität:

x	$-2{,}3$	-1	0	3	5
y	$-16{,}1$	-7	0	21	35
$\frac{y}{x}$	7	7	7	7	7

$\frac{y}{x}$ konstant, d.h. $y \sim x$.

Für die Funktion $f : x \to y = f(x)$ sind folgende Aussagen gleichbedeutend:

- f ist eine direkte Proportionalität
- $y = f(x) = kx$ mit einer Konstanten k
- $f(nx) = nf(x)$
- $(x|y) \in f \iff (nx|ny) \in f$
- Dem 2-, 3-, 4-,..., n-fachen von x entspricht das 2-, 3-, 4-,..., n-fache von y

Beispiel: Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit v; der in der Zeitspanne Δt zurückgelegte Weg Δx ist zu Δt direkt proportional, die Proportionalitätskonstante ist v:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = v$$

Beispiel: Eine Feder wird von der Kraft F um die Strecke x gedehnt. Es gilt $F \sim x$, die Proportionalitätskonstante ist die Federkonstante D:

$$F(x) = D \cdot x, \qquad \frac{F}{x} = D = \text{konstant}$$

Definitionen und Regeln | **Beispiele**

Umfang und Fläche des Kreises

Die Menge aller Punkte P, die von einem festen Punkt M die gleiche Entfernung r haben, ist die Kreislinie $\mathrm{k}(M, r)$ mit dem Mittelpunkt M und dem *Radius* r:

$$\mathrm{k}(\mathrm{M}, r) = \{\mathrm{P} \mid \overline{\mathrm{MP}} = r\}$$

Der *Durchmesser* des Kreises k ist die Länge einer Strecke [RS] mit $\mathrm{R} \in k$, $\mathrm{S} \in k$ und $\mathrm{M} \in [\mathrm{RS}]$:

$$d = \overline{\mathrm{RS}} = 2r$$

Die Länge der Kreislinie heißt *Umfang* U des Kreises. U ist zu r proportional:

$$\boxed{U = 2\pi r = \pi d}$$

mit der Kreiszahl

$$\pi = 3{,}141592654...$$

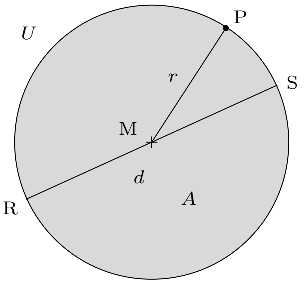
π ist ein unendlicher, nichtperiodischer Dezimalbruch, also keine rationale Zahl. Eine gute Näherung für π steht dir auf deinem Taschenrechner zur Verfügung.
Der Flächeninhalt des Kreises mit Radius r ist

$$\boxed{A = r^2\pi}$$

Ist A die Fläche eines Kreises mir Radius r und A' die Fläche eines Kreises mir Radius $r' = nr$, dann gilt:

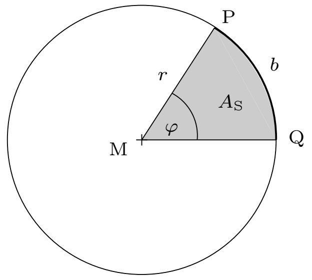
$$A' = (nr)^2\pi = n^2 \cdot r^2\pi = n^2 \cdot A$$

Ändert man den Radius eines Kreises um den Faktor n, dann ändert sich seine Fläche um den Faktor n^2.



Beispiel: Der Umfang des Erdäquators ist $U = 40000\,\mathrm{km}$. Der Radius der Erde ist also

$$R_{\mathrm{E}} = \frac{U}{2\pi} \approx 6366\,\mathrm{km}$$



Das tortenförmige Stück PMQ des Kreises heißt *Kreissektor* oder kurz *Sektor*, φ ist der Öffnungswinkel des Sektors. Die Sektorfläche A_{S} und die *Bogenlänge* b sind zu φ proportional. Die Proportionalitätskonstante findet man wie folgt: Für $\varphi = 360°$ ist A_{S} die volle Kreisfläche und b ist gleich dem Umfang:

$$\frac{b}{\varphi} = \frac{U}{360°} = \frac{2\pi r}{360°}$$

$$\frac{A_{\mathrm{S}}}{\varphi} = \frac{A}{360°} = \frac{\pi r^2}{360°}$$

Indirekte Proportionalität

Zwei Größen y und x heißen *indirekt* oder *umgekehrt proportional* zueinander, wenn das Produkt von zwei zusammengehörenden Werten konstant ist:

$$\boxed{x \cdot y = k = \text{konstant}}$$

Ist y umgekehrt proportional zu x, dann ist

$$y = f(x) = \frac{k}{x}$$

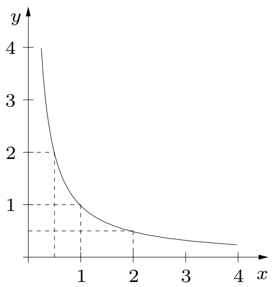
Der Graf dieser Funktion heißt *Hyperbel*.

Beispiel: Die immer gleiche Strecke s wird mit verschiedenen, pro Fahrt aber konstanten Geschwindigkeiten v zurückgelegt; dann ist v umgekehrt proportional zur Fahrzeit t:

$$v \cdot t = s$$

Der Graf der Funktion

$f(x) = \frac{1}{x}$



Definitionen und Regeln | **Beispiele**

Lineare Ungleichungen

Sind zwei Terme durch eines der Zeichen $<, >, \leqq$ oder $\geqq$ miteinander verbunden, spricht man von einer Ungleichung. Zwei Ungleichungen mit gleicher Grundmenge heißen *äquivalent*, wenn sie die gleiche Lösungsmenge besitzen. Äquivalenzumformungen von Ungleichungen sind:

- Addieren oder subtrahieren des gleichen Terms auf beiden Seiten
- Multiplizieren beider Seiten mit einem positiven Term
- Multiplizieren beider Seiten mit einem negativen Term und Umdrehen des Ungleichheitszeichens

In den folgenden Beispielen ist die Grundmenge $G = \mathbb{Q}$:

$$\begin{aligned} 0{,}5x + 4 &\leqq 0 && \mid -4 \\ 0{,}5x &\leqq -4 && \mid :0{,}5 \\ x &\leqq -8 && \Longrightarrow L =]-\infty; -8] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5x - 3 &< 8x + 6 && \mid -8x + 3 \\ -3x &< 9 && \mid :(-3) \\ x &> -3 && \Longrightarrow L =]-3; +\infty[\end{aligned}$$

Lineare Gleichungssysteme

Eine Gleichung mit zwei Unbekannten

Die lineare Gleichung

$$ax + by = c \qquad \text{(I)}$$

kann man für $b \neq 0$ nach y auflösen:

$$y = -\frac{a}{b}\,x + \frac{c}{b}$$

Für $b \neq 0$ ist die Lösungsmenge von (I) also die Menge aller Zahlenpaare $(x|y)$ mit $x \in \mathbb{Q}$ und $y = -\frac{a}{b}\,x + \frac{c}{b}$. L ist also nichts anderes als die Funktion

$$f : x \to y$$

mit der Gleichung

$$y = f(x) = -\frac{a}{b}\,x + \frac{c}{b}$$

Für $b = 0$ lautet (I):

$$ax + 0 \cdot y = c \qquad \text{(II)}$$

Für $a \neq 0$ besteht L aus allen Zahlenpaaren $(x|y)$ mit $x = \frac{c}{a}$ und beliebigem y.
Für $a = b = 0$ lautet (I):

$$\underbrace{0 \cdot x + 0 \cdot y}_{=0} = c \qquad \text{(III)}$$

Für $c \neq 0$ gibt es dann überhaupt keine Lösung ($L = \emptyset$) und für $c = 0$ ist jedes beliebige Zahlenpaar $(x|y)$ eine Lösung.

$$2x - 5y = 3 \qquad (1)$$

$(4|1)$ ist eine Lösung von (1), da tatsächlich

$$2 \cdot 4 - 5 \cdot 1 = 8 - 5 = 3$$

gilt. Weitere Lösungen von (1) sind z.B. die Zahlenpaare $(-1|-1)$, $(1|-0{,}2)$ und $(1{,}5|0)$. Die Lösungsmenge L von (1) ist eine Menge von Zahlenpaaren, also eine Relation. L hat sogar unendlich viele Elemente, da man zu jedem $x \in \mathbb{Q}$ ein passendes y finden kann, indem man (1) nach y auflöst:

$$\begin{aligned} 2x - 5y &= 3 && \mid -2x \\ -5y &= 3 - 2x && \mid :(-5) \\ y &= \frac{2}{5}\,x - \frac{3}{5} && \Longrightarrow \end{aligned}$$

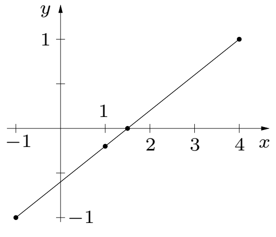
$$L = \left\{ (x|y) \,\middle|\, x \in \mathbb{Q} \text{ und } y = \frac{2}{5}\,x - \frac{3}{5} \right\}$$

L ist also nichts anderes als die Funktion

$$f : x \to f(x)$$

mit der Gleichung

$$y = f(x) = \frac{2}{5}\,x - \frac{3}{5}$$



$$L = \begin{cases} \left\{(x|y)\,\middle|\, y = -\frac{a}{b}\,x + \frac{c}{b}\right\} & \text{für } b \neq 0 \\ \left\{\left(\frac{c}{a}\middle|y\right) \,\middle|\, y \in \mathbb{Q}\right\} & \text{für } a \neq 0,\ b = 0 \\ \{(x|y)\,|\,x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}\} & \text{für } a = b = c = 0 \\ \{\ \} = \emptyset & \text{für } a = b = 0,\ c \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2x + 0 \cdot y = 6 &\quad\Longrightarrow\quad L = \{(3|y) \mid y \in \mathbb{Q}\} \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0 &\quad\Longrightarrow\quad L = \mathbb{Q}^2 = \{(x|y)\,|\,x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}\} \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y = 3 &\quad\Longrightarrow\quad L = \emptyset \end{aligned}$$

Definitionen und Regeln

Zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten

Wir betrachten das *Gleichungssystem*

$$\begin{aligned} ax + by &= c \qquad (1) \\ dx + ey &= f \qquad (2) \end{aligned}$$

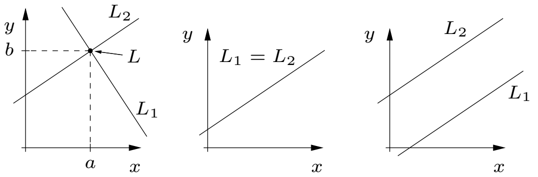
(1) hat die Lösungsmenge L_1 und (2) die Lösungsmenge L_2. Die Lösungsmenge L des Systems besteht aus allen Zahlenpaaren, die gleichzeitig Lösung von (1) und von (2) sind. L ist also die Schnittmenge von L_1 und L_2:

$$L = L_1 \cap L_2$$

L_1 ist entweder die leere Menge $\emptyset$, ganz $\mathbb{Q}^2$ oder eine Relation g_1, deren Graf eine Gerade ist. Entsprechendes gilt für L_2. Einen Überblick über die möglichen Lösungsmengen L des Gleichungssystems zeigt folgende Tabelle:

$L_2 \backslash L_1$	$\emptyset$	$\mathbb{Q}^2$	g_1
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\mathbb{Q}^2$	$\emptyset$	$\mathbb{Q}^2$	g_1
g_2	$\emptyset$	g_2	$g_1 \cap g_2$

Für den Fall, dass $L_1 = g_1$ und $L_2 = g_2$, gibt es wieder drei Fälle, wie folgende Abbildung zeigt:



$L = \{(a|b)\}$ $L = L_1 = L_2$ $L = \emptyset$

Methoden zum Lösen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} ax + by &= c \qquad (1) \\ dx + ey &= f \qquad (2) \end{aligned}$$

Gleichsetzungsverfahren:

Wenn $b \neq 0$ und $e \neq 0$ löst man beide Gleichungen nach y auf

$$\begin{aligned} (1) \quad &\Longrightarrow \quad y = -\frac{a}{b}\,x + \frac{c}{d} \qquad (3) \\ (2) \quad &\Longrightarrow \quad y = -\frac{d}{e}\,x + \frac{f}{e} \qquad (4) \end{aligned}$$

Da die linken Seiten von (3) und (4) gleich sind, müssen auch die rechten Seiten gleich sein:

$$-\frac{a}{b}\,x + \frac{c}{d} = -\frac{d}{e}\,x + \frac{f}{e}$$

Nach x auflösen und das Ergebnis in (3) oder (4) einsetzen um y zu berechnen.

Beispiele

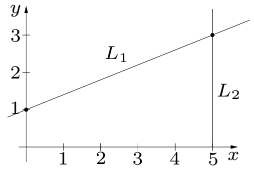
$$\begin{aligned} -2x + 5y &= 5 \qquad (1) \\ 3x + 0 \cdot y &= 15 \qquad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_1 &= \left\{ (x|y) \,\middle|\, y = \frac{2}{5}\,x + 1 \right\} \\ L_2 &= \{(x|y) \mid x = 5,\ y \in \mathbb{Q}\} \end{aligned}$$

$x = 5$ aus L_2 in L_1 eingesetzt ergibt

$$y = \frac{2}{5} \cdot 5 + 1 = 3$$

$L = L_1 \cap L_2 = \{(5|3)\}$



Beispiel für das Gleichsetzungsverfahren:

$$\begin{aligned} -x + 4y &= 14 \qquad (1) \\ x + 2y &= 4 \qquad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1) \quad \Longrightarrow \quad y &= \frac{1}{4}x + \frac{7}{2} \qquad (3) \\ (2) \quad \Longrightarrow \quad y &= -\frac{1}{2}x + 2 \qquad (4) \\ (3) = (4): \quad \frac{1}{4}x + \frac{7}{2} &= -\frac{1}{2}x + 2 \qquad (5) \\ \frac{3}{4}x &= -\frac{3}{2} \qquad (6) \\ x &= -2 \qquad (7) \\ (7) \text{ in } (4): \quad y &= -\frac{1}{2} \cdot (-2) + 2 = 3 \\ L &= \{(-2 \mid 3)\} \end{aligned}$$

Beispiel für das Einsetzverfahren:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y &= \frac{1}{4} \qquad (1) \\ x - 2y &= 0 \qquad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \Longrightarrow \quad x &= 2y \qquad (3) \\ (3) \text{ in } (1): \quad \frac{1}{2} \cdot 2y - \frac{1}{3}y &= \frac{1}{4} \qquad (4) \\ \frac{2}{3}y &= \frac{1}{4} \qquad (5) \\ y &= \frac{3}{8} \qquad (6) \\ (6) \text{ in } (3): \quad x &= 2y = \frac{3}{4} \\ L &= \left\{ \left(\frac{3}{4} \,\middle|\, \frac{3}{8} \right) \right\} \end{aligned}$$

Definitionen und Regeln

Einsetzverfahren:

Eine der beiden Gleichungen wird nach einer der Unbekannten aufgelöst und das Ergebnis in die andere Gleichung eingesetzt. Die so erhaltene Gleichung mit einer Unbekannten wird gelöst und das Ergebnis in (1) oder (2) eingesetzt, um die andere Unbekannte zu erhalten.

Additionsverfahren:

Die beiden Gleichungen werden so mit je einer Zahl multipliziert, dass der Koeffizient einer Unbekannten in der einen Gleichung gleich dem Negativen des Koeffizienten derselben Unbekannten in der anderen Gleichung wird. Beim Addieren der so erhaltenen Gleichungen fällt dann eine Unbekannte heraus.

$$\begin{array}{rl}
ax + by = c & (1)\,|\cdot e \\
dx + ey = f & (2)\,|\cdot(-b) \\
\hline
aex + bey = ce & (3) \\
-bdx - bey = -bf & (4) \\
\hline
(3)+(4): \quad (ae-bd)x = ce - bf & (5) \\
\text{Für } ae - bd \neq 0: \quad x = \dfrac{ce-bf}{ae-bd} & \\
\hline
(1)\cdot(-d): -adx - bdy = -cd & (6) \\
(2)\cdot(-a): adx + aey = +af & (7) \\
\hline
(6)+(7): (ae-bd)y = af - cd & (8) \\
y = \dfrac{af-cd}{ae-bd} &
\end{array}$$

Beispiel für das Additionsverfahren:

$$\begin{array}{rl}
12x - 18y = 6 & (1)\,|:6 \\
-10x + 15y = -5 & (2)\,|:(-5) \\
\hline
2x - 3y = 1 & (3) \\
2x - 3y = 1 & (4) \\
\hline
(3)-(4): \quad 0 = 0 & (5)
\end{array}$$

(3) und (4) sind identisch, d.h. beide Gleichungen haben die gleiche Lösungsmenge:

$$L = L_1 = L_2 = \left\{ (x|y) \,\middle|\, y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} \right\}$$

Beispiele

Beispiel für das Additionsverfahren:

$$\begin{array}{rl}
3x - 4y = 43 & (1)\,|\cdot 2 \\
-2x - 3y = 11 & (2)\,|\cdot 3 \\
\hline
6x - 8y = 86 & (3) \\
-6x - 9y = 33 & (4) \\
\hline
(3)+(4): \quad -17y = 119 & (5) \\
y = -7 & (6) \\
(6) \text{ in } (2): -2x - 3\cdot(-7) = 11 & \\
-2x + 21 = 11 & \\
-2x = -10 & \\
x = \dfrac{-10}{-2} = 5 & \\
L = \{(5|-7)\} &
\end{array}$$

Beispiel für das Additionsverfahren:

$$\begin{array}{rl}
18x - 17y = 124 & (1)\,|\cdot(-2) \\
12x + 13y = 34 & (2)\,|\cdot 3 \\
\hline
-36x + 34y = -248 & (3) \\
36x + 39y = 102 & (4) \\
\hline
(3)+(4): \quad 73y = -146 & (5) \\
y = -2 & (6) \\
(6) \text{ in } (2): 12x - 26 = 34 & \\
x = 5 & \\
L = \{(5|-2)\} &
\end{array}$$

Beispiel für das Additionsverfahren:

$$\begin{array}{rl}
12x - 18y = 6 & (1)\,|:6 \\
-10x + 15y = 5 & (2)\,|:(-5) \\
\hline
2x - 3y = 1 & (3) \\
2x - 3y = -1 & (4) \\
\hline
(3)-(4): \quad 0 = 2 & (5)
\end{array}$$

(5) ist für kein Wertepaar erfüllbar, d.h.

$$L = \emptyset$$

Die Grafen von L_1 und L_2 sind parallele Geraden, die keinen Punkt gemeinsam haben.

Definitionen und Regeln | **Beispiele**

Bruchterme

Definitionsmenge von Bruchtermen

Enthält der Nenner N eines Bruchterms $T = \frac{Z}{N}$ Variable, dann müssen diese so gewählt werden, dass $N \neq 0$ ist.
Enthält ein Bruchterm nur eine Variable, z.B. x, dann gilt

$$T(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$$

mit dem Zählerterm $Z(x)$ und dem Nennerterm $N(x)$. Die maximale Definitionsmenge von T ist dann $\mathbb{Q}$ ohne die Nullstellen des Nenners:

$$D_T = \mathbb{Q} \setminus \{\, x \,|\, N(x) = 0\}$$

Ein Produkt ist null, wenn einer der Faktoren null ist.

$$T_1(x) \cdot T_2(x) \cdot \;...\; \cdot T_n(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$T_1(x) = 0$ oder $T_2(x) = 0$ oder ... oder $T_n(x) = 0$

Die maximale Definitionsmenge eines Terms, der mehrere Brüche enthält, ist $\mathbb{Q}$ ohne die Menge der Nullstellen aller vorkommenden Nenner.

$$T(x) = \frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{x^2 - 3x}{5x - 2}$$

$N(x) = 2x - 5 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{2}{5}$

Max. Definitionsmenge von T: $D_T = \mathbb{Q} \setminus \left\{\frac{2}{5}\right\}$

$$T(x, y) = \frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{x + y}{x - y}$$

$N(x) = x - y = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = x$

$D_T = \{(x|y) \,|\, y \neq x\} = \mathbb{Q}^2 \setminus \{(x|y) \,|\, y = x\}$

Der Graf von D_T (nicht von der Funktion $T(x, y)$) ist also die ganze Ebene $\mathbb{Q}^2$ ohne der Geraden mit der Gleichung $y = x$.

$$T(x) = \frac{x}{3x + 5} - \frac{4}{x^2} + \frac{1}{(x - 3)(x + 1)}$$

$3x + 5 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = -\frac{5}{3}$

$x^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0$

$(x - 3)(x + 1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 3$ oder $x = -1$

$D_T = \mathbb{Q} \setminus \left\{-\frac{5}{3}, -1, 0, 3\right\}$

Erweitern und Kürzen

Ein Bruchterm geht bei geeignet gewählter Definitionsmenge D in einen äquivalenten Term über, wenn Zähler und Nenner mit dem gleichen Term multipliziert werden (*Erweitern*):

$$\boxed{\frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{Z(x) \cdot A(x)}{N(x) \cdot A(x)}}$$

Ein Bruchterm geht bei geeignet gewählter Definitionsmenge D in einen äquivalenten Term über, wenn Zähler und Nenner durch den gleichen Term dividiert werden bzw. wenn man im Zähler und im Nenner den gleichen *Faktor* weglässt (*Kürzen*):

$$\boxed{\frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{Z(x) : A(x)}{N(x) : A(x)}}$$

$$\boxed{\frac{Z(x) \cdot A(x)}{N(x) \cdot A(x)} = \frac{Z(x)}{N(x)}}$$

Die Terme $\frac{2x}{x - 3}$ und $\frac{2x(x + 5)}{(x - 3)(x + 5)}$ sind äquivalent für $x \in \mathbb{Q} \setminus \{-5, 3\}$.

$$\frac{36a^5b^7}{27a^8b^3} = \frac{4b^4}{3a^3}$$

$$\frac{48xy - 72y^2}{22x - 33y} = \frac{24y(2x - 3y)}{11(2x - 3y)} = \frac{24y}{11}$$

$$\frac{a - x}{x - a} = \frac{-1 \cdot (x - a)}{1 \cdot (x - a)} = -1$$

$$\begin{aligned} \frac{ac + bc - ad - bd}{ad - bd - ac + bc} &= \frac{(a + b)c - (a + b)d}{(a - b)d - (a - b)c} = \\ = \frac{(a + b)(c - d)}{(a - b)(d - c)} &= \frac{(a + b)(c - d)}{-(a - b)(c - d)} = \\ = \frac{a + b}{-a + b} &= \frac{b + a}{b - a} \end{aligned}$$

Definitionen und Regeln | **Beispiele**

Gleichnamigmachen

Zwei oder mehr Bruchterme heißen *gleichnamig*, wenn sie den gleichen Nenner haben. Durch geschicktes Erweitern kann man Bruchterme immer gleichnamig machen.

> Das Produkt aller Nenner mehrerer Bruchterme ist ein gemeinsamer Nenner dieser Terme. Der kleinste gemeinsame Nenner mehrerer Brüche ist iht *Hauptnenner* (HN). Der Hauptnenner ist das kgV der einzelnen Nenner.

$$T_1 = \frac{x}{36a^2b}, \quad T_2 = \frac{y}{48b^7c^3}, \quad T_3 = \frac{z}{64a^4b^2c^5}$$

Hauptnenner: HN $= 576a^4b^7c^5$

Erweiterungsfaktoren: $16a^2b^6c^5, \quad 12a^4c^2, \quad 9b^4$

Gleichnamig gemacht:

$$T_1 = \frac{16xa^2b^6c^5}{576a^4b^7c^5}, \quad T_2 = \frac{12ya^4c^2}{576a^4b^7c^5}, \quad T_3 = \frac{9zb^4}{576a^4b^7c^5}$$

Rechnen mit Bruchtermen

Wiederholung der Rechenregeln (siehe S. 12):

$$\boxed{\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}} \qquad \boxed{\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}}$$

$$\boxed{\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}}$$

$$\boxed{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}} \qquad \boxed{\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}}$$

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$$

$$\boxed{\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}} \qquad \boxed{\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \cdot c}}$$

$$\boxed{1 : \frac{a}{b} = \frac{b}{a}}$$

> Doppelbrüche vereinfacht man durch Erweiterung des Hauptbruches mit dem Hauptnenner sämtlicher Teilbrüche.

Bestehen Zähler und Nenner des Hauptbruches nur aus Produkten von Teilbrüchen, dann gilt für die Zähler und Nenner der Teilbrüche die einfache Regel:

> Zähler bleiben, Nenner springen (über den Hauptbruchstrich).

$$\frac{\frac{a}{\textcircled{b}} \cdot \frac{c}{\textcircled{d}}}{\frac{e}{\textcircled{f}} \cdot \frac{g}{\textcircled{h}}} = \frac{acfh}{egbd}$$

$$\frac{a}{x} - \frac{x}{a} = \frac{a^2}{ax} - \frac{x^2}{ax} = \frac{a^2 - x^2}{ax}$$

$$1 - \frac{1}{x} = \frac{x}{x} - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

$$\frac{x-b}{x+b} - 1 = \frac{x-b}{x+b} - \frac{x+b}{x+b} = \frac{x-b-(x+b)}{x+b} = \frac{-2b}{x+b}$$

$$\frac{(a-b)^2}{18xy} \cdot \frac{24x}{y(b-a)} = \frac{4 \cdot 6x(a-b)^2}{-3 \cdot 6xy^2(a-b)} = -\frac{4(a-b)}{3y^2}$$

$$\begin{aligned} & 3 \cdot \frac{1}{x} - \frac{13x}{4} : x^2 + \frac{x}{3} : \frac{x^2}{4} = \\ & = \frac{3}{x} - \frac{13x}{4x^2} + \frac{4x}{3x^2} = \frac{3}{x} - \frac{13}{4x} + \frac{4}{3x} = \\ & = \frac{3 \cdot 12 - 13 \cdot 3 + 4 \cdot 4}{12x} = \frac{36 - 39 + 16}{12x} = \frac{13}{12x} \end{aligned}$$

Erweitern mit abc:

$$\frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b} + \frac{1}{c}} = \frac{bc}{ac + ab} = \frac{bc}{a(b+c)}$$

Erweitern mit $x(x-2)$:

$$\frac{1 - \frac{1}{x-2}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{x(x-2) - x}{x(x-2) - (x-2)} = \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 3x + 2}$$

Vorsicht, hier kann nicht gekürzt werden!!

$$\frac{\frac{a}{3} \cdot \frac{12}{x} \cdot \frac{3y}{8}}{\frac{a^2}{y} \cdot \frac{x}{4a}} = \frac{a \cdot 12 \cdot 3y \cdot y \cdot 4a}{a^2x \cdot 3 \cdot 8x} = \frac{6y^2}{x^2}$$

Definitionen und Regeln

Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

Siehe auch S.3 und S.6.

Für $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{Q}$ definiert man

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$$

Für $n \geqq 2$ gilt

$$\boxed{a^n : a = a^{n-1}} \quad \text{(I)}$$

Wir definieren a^p für ganze Exponenten p ($p \in \mathbb{Z}$) so, dass die Regel (I) weiterhin gilt:

$$\text{(I)} \implies \left.\begin{array}{l} a^1 : a = a^{1-1} = a^0 \\ a^1 : a = a : a = 1 \end{array}\right\} \implies a^0 = 1$$

$$\begin{aligned} a^{-1} &= a^{0-1} = a^0 : a = \frac{1}{a} = \frac{1}{a^1} \\ a^{-2} &= a^{-1-1} = a^{-1} : a = \frac{1}{a} : a = \frac{1}{a^2} \\ a^{-3} &= a^{-2-1} = a^{-2} : a = \frac{1}{a^2} : a = \frac{1}{a^3} \end{aligned}$$

Aufgrund dieser Ergebnisse definiert man für $n \in \mathbb{N}$ und $a \neq 0$:

$$\boxed{a^0 = 1} \quad \boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

Spezialfälle:

$$\boxed{a^1 = a} \quad \boxed{a^{-1} = \frac{1}{a}} \quad \boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}}$$

Vorsicht: $\boxed{0^0 \text{ ist nicht definiert!}}$

Für $a \neq 0$, $b \neq 0$ und $p, q \in \mathbb{Z}$ gelten die **Potenzgesetze:**

$$\boxed{\begin{array}{lll} a^p \cdot b^p = (ab)^p & ; & \dfrac{a^p}{b^p} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^p \\ a^p \cdot a^q = a^{p+q} & ; & \dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q} \\ (a^p)^q = a^{pq} & & \end{array}}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \frac{1}{\frac{a^n}{b^n}} = \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n}$$

Beachte folgende Reihenfolge bei der Berechnung:

$$\boxed{a^{p^q} = a^{(p^q)}}$$

Beispiele

$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$

$2^3 \cdot 2^2 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) = 2^5 = 2^{3+2}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$

$2^5 : 2 = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2} = 2^4 = 2^{5-1}$

$2^5 : 2^3 = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 2^2 = 2^{5-3}$

$2^3 : 2^5 = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{2^2} = 2^{-2} = 2^{3-5}$

$2^3 \cdot 2^{-5} = 2^3 : 2^5 = \frac{1}{2^2} = 2^{-2} = 2^{3-5}$

$\left(2^3\right)^2 = 2^3 \cdot 2^3 = 2^6 = 2^{3 \cdot 2}$

$\left(2^{-3}\right)^2 = \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2^6} = 2^{-6} = 2^{(-3) \cdot 2}$

$3^{-5} \cdot 2^{-5} = \frac{1}{3^5} \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{1}{3^5 \cdot 2^5} = \frac{1}{(3 \cdot 2)^5} = (3 \cdot 2)^{-5}$

Zehnerpotenzen:

$$\boxed{0{,}1^n = \left(\frac{1}{10}\right)^n = 10^{-n}}$$

$\boxed{\text{mal } 10^n : \text{Komma um } n \text{ Stellen nach rechts}}$

$\boxed{\text{mal } 10^{-n} : \text{Komma um } n \text{ Stellen nach links}}$

$$340\,000\,000 = 3{,}4 \cdot 10^8$$

$$0{,}000\,034 = 3{,}4 \cdot 10^{-5}$$

Volumen eines Würfels mit der Kantenlänge $a = 3 \cdot 10^{-15}\,\text{m}$ (Atomkern):

$$V = \left(3 \cdot 10^{-15}\,\text{m}\right)^3 = 9 \cdot 10^{-45}\,\text{m}^3$$

Schreibweise von Benennungen:

$$a = 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 9{,}81\,\text{ms}^{-2}$$

$\left(a^3 b^{-4} c^2\right)^{-2} = a^{-6} b^8 c^{-4}$

$x^{3n} y^n : \left(\frac{x^2}{y^3}\right)^n = x^{3n} y^n \cdot \frac{y^{3n}}{x^{2n}} = x^n y^{4n}$

$$\begin{aligned} &(a-b)^3 \cdot (2b-2a)^{-7} = (a-b)^3 \cdot [(-2)(a-b)]^{-7} = \\ &= (a-b)^3 \cdot (-2)^{-7} \cdot (a-b)^{-7} = -\frac{1}{128(a-b)^4} \end{aligned}$$

$\left(3^3\right)^3 = 3^{3 \cdot 3} = 3^9 = 19\,683$

$3^{3^3} = 3^{27} = 7\,625\,597\,484\,987$

Definitionen und Regeln

Bruchgleichungen

Eine Gleichung, die die Unbekannte im Nenner eines Bruches enthält, heißt *Bruchgleichung.* Ist N_0 die Menge der Nullstellen aller in der Gleichung auftretenden Nenner, dann ist $D = \mathbb{Q} \setminus N_0$ die Definitionsmenge der Gleichung.
Beim Umformen einer Bruchgleichung müssen beide Gleichungsseiten mit Termen multipliziert werden, die die Unbekannte enthalten. Daher kann die umgeformte Gleichung eine andere Definitionsmenge haben als die ursprüngliche Gleichung. Es kann also Lösungen der umgeformten Gleichung geben, die keine Lösungen der ursprünglichen Gleichung sind.

> Die gefundenen Lösungen einer Bruchgleichung müssen auf Zugehörigkeit zur Definitionsmenge überprüft werden. Dies kann durch Einsetzen der Lösungen in die Ursprungsgleichung geschehen.

Strategien zum Lösen von Bruchgleichungen:

Eine Bruchgleichung hat immer die Form

$$\frac{Z_1(x)}{N_1(x)} + \frac{Z_2(x)}{N_2(x)} + \ldots + \frac{Z_n(x)}{N_n(x)} = 0$$

Um die Nenner zu beseitigen, multipliziert man die Gleichung mit dem Hauptnenner.

Spezialfall: Über Kreuz Multiplizieren:

$$\left.\frac{Z_1(x)}{N_1(x)} = \frac{Z_2(x)}{N_2(x)}\right| \cdot N_1(x)N_2(x)$$
$$Z_1(x) \cdot N_2(x) = Z_2(x) \cdot N_1(x)$$

Beispiel:

R ist der Gesamtwiderstand von zwei parallel geschalteten Widerständen R_1 und R_2:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Auflösen nach R:

$$\frac{1}{R} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \quad \Longrightarrow \quad R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Auflösen nach R_1:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_2} = \frac{R_2 - R}{R \cdot R_2}$$
$$\Longrightarrow \quad R_1 = \frac{R\,R_2}{R_2 - R}$$

Beispiele

$$\frac{a}{x} = b\,, \quad a \neq 0 \text{ und } b \neq 0$$
$$\Longrightarrow \quad a = bx \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{a}{b}$$

Für die anderen Fälle siehe S.24.

$$\begin{aligned} \frac{2}{x-3} &= \frac{3}{x-2}, \qquad D = \mathbb{Q} \setminus \{2; 3\} \\ 2(x-2) &= 3(x-3) \\ 2x - 4 &= 3x - 9 \\ x &= 5 \in D \quad \Longrightarrow \quad L = \{5\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{x-3} &= \frac{5}{x-3}, \qquad D = \mathbb{Q} \setminus \{3\} \\ 2(x-3) &= 5(x-3) \\ 2x - 6 &= 5x - 15 \\ 9 &= 3x \\ x &= 3 \notin D \quad \Longrightarrow \quad L = \emptyset \end{aligned}$$

$$\frac{11}{(2x-6)(3x+9)} + \frac{2x+3}{6x-18} - \frac{x+1}{3x+9} = 0$$
$$\frac{11}{6(x-3)(x+3)} + \frac{2x+3}{6(x-3)} - \frac{x+1}{3(x+3)} = 0$$

$D = \mathbb{Q} \setminus \{-3; 3\}$. Multiplizieren der Gleichung mit dem Hauptnenner $HN = 6(x-3)(x+3)$:

$$\begin{aligned} 11 + (2x+3)(x+3) - 2(x+1)(x-3) &= 0 \\ 11 + 2x^2 + 9x + 9 - 2x^2 + 4x + 6 &= 0 \\ 13x &= -26 \\ x &= -2 \in D \\ \Longrightarrow \quad L &= \{-2\} \end{aligned}$$

$$\frac{4}{(x-3)(x+3)} + \frac{2x+3}{6x-18} - \frac{x+1}{3x+9} = 0$$
$$\frac{4}{(x-3)(x+3)} + \frac{2x+3}{6(x-3)} - \frac{x+1}{3(x+3)} = 0$$

$D = \mathbb{Q} \setminus \{-3; 3\}$. Multiplizieren der Gleichung mit dem Hauptnenner $HN = 6(x-3)(x+3)$:

$$\begin{aligned} 24 + (2x+3)(x+3) - 2(x+1)(x-3) &= 0 \\ 24 + 2x^2 + 9x + 9 - 2x^2 + 4x + 6 &= 0 \\ 13x &= -39 \\ x &= -3 \notin D \\ \Longrightarrow \quad L &= \emptyset \end{aligned}$$

Definitionen und Regeln

Gebrochen rationale Funktionen

Ein Term der Form

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ ... \ + a_n x^n$$

mit $a_n \neq 0$ heißt *Polynom* n-ten Grades.
Eine Funktion, deren Funktionsterm ein Polynom n-ten Grades ist, heißt *ganzrationale* Funktion n-ten Grades.
Lineare (affine) Funktionen sind ganzrationale Funktionen ersten Grades.
Eine Funktion, deren Funktionsterm ein Quotient zweier Polynome ist, heißt *gebrochen rationale* Funktion:

$$g : x \to g(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$$

mit dem Zählerpolynom $Z(x)$ und dem Nennerpolynom $N(x)$.
Die maximale Definitionsmenge von g ist

$$D_g = \mathbb{Q} \setminus \{\text{Nullstellen von } N\}$$

Die Nullstellen von g ($g(x) = 0$) sind die Nullstellen des Zählerpolynoms Z, die in D_g liegen.

$Z(x)$ und $N(x)$ können auch Produkte von Polynomen sein, da ein Produkt von Polynomen wieder ein Polynom ist.

x_0 sei eine Nullstelle des Nenners, nicht aber des Zählers: $N(x_0) = 0$ und $Z(x_0) \neq 0$. Für ein x ganz in der Nähe von x_0 ist $|N(x)|$ sehr klein und damit $|g(x)| = \left|\frac{Z(x)}{N(x)}\right|$ sehr groß. Je näher x an x_0 heranrückt, um so größer wird $|g(x)|$. Der Graf von g nähert sich immer mehr an die Gerade $x = x_0$ an, wenn sich x an x_0 annähert. Die zur y-Achse parallele Gerade mit der Gleichung $x = x_0$ ist eine senkrechte *Asymptote* von g, g hat bei x_0 eine *Polstelle* oder kurz einen *Pol.*

Verhalten von $g(x)$, wenn $|x|$ immer größer wird ($|x| \to \infty$):

Grad(Z) < Grad(N): Waagrechte Asymptote $y = 0$.

Grad(Z) > Grad(N): $|g(x)|$ wird immer größer.

Grad(Z) = Grad(N):

$$g(x) = \frac{a_n x^n + \ ... \ + a_0}{b_n x^n + \ ... \ + b_0} = \frac{a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ ... \ + \frac{a_0}{x^n}}{b_n + \frac{b_{n-1}}{x} + \ ... \ + \frac{b_0}{x^n}}$$

Die Teilbrüche werden immer kleiner, $g(x)$ nähert sich an $\frac{a_n}{b_n}$ an (waagrechte Asymptote).

Beispiele

Beispiele von Polynomen:

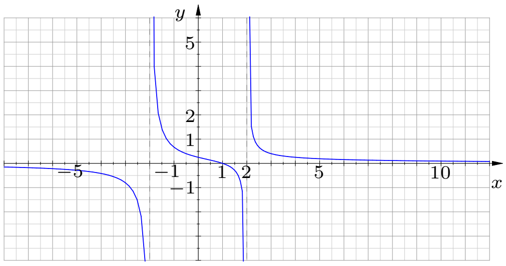
Grad	Polynom
0	3
1	$3 - x$
2	$5x^2 - 3x + 4$
3	$x^3 - 7$

$$g(x) = \frac{(x-2)(2x+3)}{(3x-9)(2x+5)} = \frac{2x^2 - x - 6}{6x^2 - 3x - 45}$$

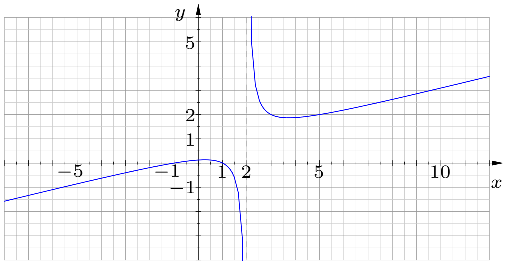
$$D_g = \mathbb{Q} \setminus \left\{-\frac{5}{2}, 3\right\}$$

Nullstellen: $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{3}{2}$

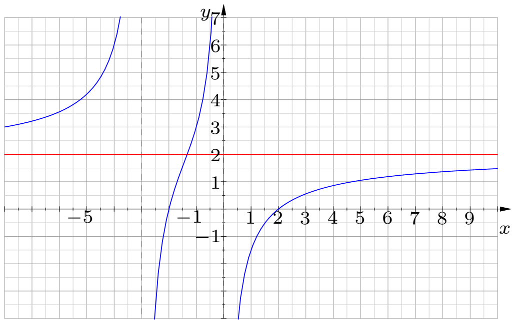
$g(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$, $\quad D_g = \mathbb{Q} \setminus \{-2; 2\}$



$g(x) = \frac{x^2-1}{4x-8} = \frac{x^2-1}{4(x-2)}$, $\quad D_g = \mathbb{Q} \setminus \{2\}$



$g(x) = \frac{2x^2-8}{x^2+3x} = \frac{2(x^2-4)}{x(x+3)}$
$D_g = \mathbb{Q} \setminus \{-3; 0\}$



Wahrscheinlichkeit

Definitionen und Regeln | **Beispiele**

Der Ergebnisraum

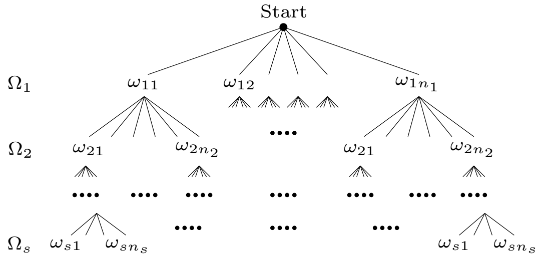
Die Menge Ω aller Ergebnisse eines Zufallsexperiments ZE heißt *Ergebnismenge* oder *Ergebnisraum* des Zufallsexperiments. Die Anzahl n der Ergebnisse ist die Mächtigkeit von Ω:

$$n = |\Omega|$$

Ein mehrstufiges Zufallsexperiment (z.B. mehrmaliges Würfeln) besteht aus s Experimenten mit den Ergebnisräumen Ω_1, Ω_2, ... , Ω_s und ihren Mächtigkeiten $n_1 = |\Omega_1|$ bis $n_s = |\Omega_s|$.

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{\omega_{11}, \omega_{12}, ..., \omega_{1n_1}\} \\ \Omega_2 &= \{\omega_{21}, \omega_{22}, ..., \omega_{1n_2}\} \\ ... &= ... \\ \Omega_s &= \{\omega_{s1}, \omega_{s2}, ..., \omega_{sn_s}\} \end{aligned}$$

Baumdiagramm eines Zufallsexperiments:



Der Ergebnisraum des s-stufigen Zufallsexperiments ist Ω. Jedes Element $\omega \in \Omega$ besteht aus s Ergebnissen der Einzelexperimente:

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_s)$$

mit

$$\omega_1 \in \Omega_1,\ \omega_2 \in \Omega_2,\ ... , \omega_s \in \Omega_s$$

$$\boxed{|\Omega| = |\Omega_1| \cdot |\Omega_2| \cdot\ ...\ \cdot |\Omega_s| = n_1 \cdot n_2 \cdot\ ...\ \cdot n_s}$$

ZE: „Einmal Würfeln“ $\Longrightarrow$ $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

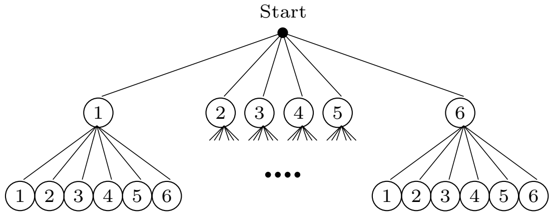
$n = |\Omega| = 6$

ZE: „Zweimal Würfeln“ $\Longrightarrow$

$\Omega = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, ... , 64, 65, 66\}$

23 z.B. bedeutet: Beim ersten Wurf 2, beim zweiten Wurf 3.

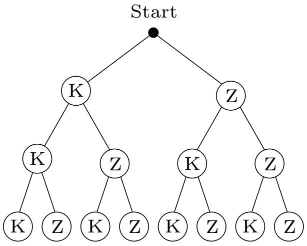
$n = |\Omega| = 6 \cdot 6 = 36$



ZE: „Drei Münzen werden geworfen“ $\Longrightarrow$

$\Omega = \{$KKK,KKZ,KZK,KZZ,ZKK,ZKZ,ZZK,ZZZ$\}$

$|\Omega| = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$



ZE: „Zehn Münzen werden geworfen“ $\Longrightarrow$

$\Omega = \{$KKKKKKKKKK, KKKKKKKKKZ,...
ZZZZZZZZZK, ZZZZZZZZZZ$\}$

$|\Omega| = 2^{10} = 1024$

Ereignisse

ZE ist ein Zufallsexperiment mit dem Ergebnisraum Ω.

$\boxed{\text{Jede Teilmenge von } \Omega \text{ heißt } \textit{Ereignis.}}$

$E \subset \Omega$ ist ein Ereignis. Das ZE wird einmal ausgeführt, das Ergebnis ist ω.

$\boxed{\text{Das Ereignis } E \text{ ist eingetreten, wenn } \omega \in E.}$

Ereignisse micht der Mächtigkeit eins heißen *Elementarereignisse.* Zu Ω gibt es genau $n = |\Omega|$ Elementarereignisse.

ZE: „Einmal Würfeln“
E: „Die gewürfelte Zahl ist gerade.“
$E = \{2, 4, 6\}$

ZE: „Zweimal Würfeln“
E: „Die Augensumme ist 7.“
$E = \{16, 25, 34, 43, 52, 61\}$

ZE: „Einmal Würfeln“
Die Elementarereignisse sind $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$ und $\{6\}$.

Definitionen und Regeln

Ist E ein Ereignis eines Zufallsexperiments mit dem Ergebnisraum Ω, dann nennt man

$$\boxed{\overline{E} = \Omega \setminus E = \{\omega \,|\, \omega \in \Omega \text{ und } \omega \notin E\}}$$

das *Gegenereignis* von E. $\overline{E}$ besteht also aus allen Ergebnissen, die nicht in E liegen.

Eine Menge $\mathcal{Z} = \{E_1, E_2, ..., E_r\}$ von Ereignissen heißt *Zerlegung* von Ω, wenn

$$E_1 \cup E_2 \cup \, ... \, \cup E_r = \Omega$$

und der Durchschnitt von zwei beliebigen Mengen aus $\mathcal{Z}$ immer leer ist:

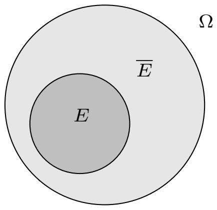
$$E_i \cap E_k = \emptyset \text{ für } i \neq k$$

Beispiele: Ist $E \neq \emptyset$ ein beliebiges Ereignis, dann ist $\mathcal{Z} = \{E, \overline{E}\}$ eine Zerlegung von Ω.

Die Menge aller Elementarereignisse von Ω ist eine Zerlegung von Ω.

Beispiele

Ereignis und Gegenereignis im Mengendiagramm.



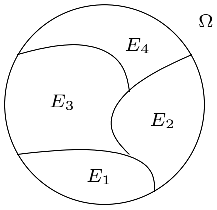
ZE: „Einmal Würfeln“

E: „Die gewürfelte Zahl ist gerade.“

$\overline{E}$: „Die gewürfelte Zahl ist ungerade.“

Eine Zerlegung von Ω in vier Ereignisse:

$\Omega = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4$



$E_1 \cap E_2 = \emptyset$, $E_1 \cap E_3 = \emptyset$

$E_1 \cap E_4 = \emptyset$, $E_2 \cap E_3 = \emptyset$

$E_2 \cap E_4 = \emptyset$, $E_3 \cap E_4 = \emptyset$

Beim Amerikanischen Roulette besteht der Ergebnisraum aus den Zahlen von null bis 36 und der Doppelnull: $\Omega = \{00, 0, 1, 2, 3, 4, ..., 36\}$ mit $|\Omega| = 38$. Eine mögliche Zerlegung von Ω ist

$$\mathcal{Z} = \{\{00, 0\}, \{x|1 \leqq x \leqq 18\}, \{x|19 \leqq x \leqq 36\}\}$$

Die Potenzmenge

Die leere Menge $\emptyset$ ist Teilmenge von jeder Menge und somit bei jedem Zufallsexperiment ein Ereignis. Da die leere Menge kein Element enthält, kann das Ereignis $\emptyset$ niemals eintreten:

$$\boxed{\emptyset \text{ heißt das } \textit{unmögliche Ereignis.}}$$

Da jede Menge eine Teilmenge von sich selbst ist, ist auch Ω ein Ereignis. Da jedes mögliche Ergebnis ein Element von Ω ist, tritt Ω immer ein:

$$\boxed{\Omega \text{ heißt das } \textit{sichere Ereignis.}}$$

Die Menge aller Teilmengen einer Menge A heißt *Potenzmenge* von A:

$$\mathcal{P}(A) = \{T \,|\, T \subset A\}$$

$$\boxed{|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}}$$

Die Menge aller Ereignisse eines Zufallsexperiments mit dem Ergebnisraum Ω ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ mit der Mächtigkeit

$$|\mathcal{P}(\Omega)| = 2^{|\Omega|}$$

$A = \{1, 2\}$, $|A| = 2$

$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

$|\mathcal{P}(A)| = 4 = 2^2 = 2^{|A|}$

$B = \{1, 2, 3\}$, $|B| = 3$

$\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

$|\mathcal{P}(B)| = 8 = 2^3 = 2^{|B|}$

Beim Europäischen Roulette besteht der Ergebnisraum aus den Zahlen von null bis 36:

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, ..., 36\}$$

mit $|\Omega| = 37$. In den Spielregeln sind einige Ereignisse definiert, auf die man sein Geld setzen kann, wie z.B. „alle geraden Zahlen“, „alle ungeraden Zahlen“, „erstes Dutzend“, usw. Das Spiel ist aber noch fast beliebig erweiterbar, denn es gibt

$$|\mathcal{P}(\Omega)| = 2^{37} = 137\,438\,953\,472$$

verschiedene Ereignisse.

Definitionen und Regeln

Relative Häufigkeit

Ein Zufallsexperiment wird N-mal durchgeführt. Tritt das Ereignis E dabei $H(E)$ mal ein, dann heißt $H(E)$ die *absolute Häufigkeit* von E und

$$h(E) = \frac{H(E)}{N}$$

die *relative Häufigkeit* von E.

$$0 \leqq H \leqq N \quad \Longrightarrow \quad \boxed{0 \leqq h \leqq 1}$$

$$H(\emptyset) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{h(\emptyset) = 0}$$

$$H(\Omega) = N \quad \Longrightarrow \quad \boxed{h(\Omega) = 1}$$

Die absolute bzw. relative Häufigkeit eines Ergebnisses ω ist gleich der Häufigkeit des Elementarereignisses $\{\omega\}$ (vereinfachte Schreibweise):

$$H(\omega) = H(\{\omega\}), \quad h(\omega) = h(\{\omega\})$$

Ist $\mathcal{Z} = \{E_1, E_2, \ldots, E_r\}$ eine Zerlegung von Ω, dann gilt (Zerlegungssatz)

$$H(E_1) + H(E_2) + \ldots + H(E_r) = N$$

$$h(E_1) + h(E_2) + \ldots + h(E_r) = 1$$

Die absolute bzw. relative Häufigkeit eines Ereignisses $E = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r\}$ ist gleich der Summe der Häufigkeiten der Elementarereignisse von E:

$$H(E) = H(\omega_1) + H(\omega_2) + \ldots + H(\omega_r)$$

$$h(E) = h(\omega_1) + h(\omega_2) + \ldots + h(\omega_r)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} h(E) &= \frac{H(E)}{N} = \frac{H(\omega_1) + \ldots + H(\omega_r)}{N} = \\ &= \frac{H(\omega_1)}{N} + \frac{H(\omega_2)}{N} + \ldots + \frac{H(\omega_r)}{N} = \\ &= h(\omega_1) + h(\omega_2) + \ldots + h(\omega_r) \end{aligned}$$

Für sehr große Versuchszahlen ($N \to \infty$) stabilisieren sich die relativen Häufigkeiten eines Ereignisses E um einen festen Wert, die Breite des Intervalls, in dem z.B. 90 % der relativen Häufigkeiten liegen, wird immer kleiner (*Gesetz der großen Zahlen*). Den Stabilisierungswert der relativen Häufigkeit von E nennt man die *Wahrscheinlichkeit* des Ereignisses E.

Beispiele

ZE: „Werfen eines Würfels“, $N = 600$

E_1: „Werfen einer geraden Zahl“

E_2: „Werfen einer ungeraden Zahl“

	1	2	3	4	5	6
H	91	89	110	115	97	98
h in %	15,2	14,8	18,3	19,2	16,2	16,3

$$H(E_1) = 89 + 115 + 98 = 302$$

$$H(E_2) = 91 + 110 + 97 = 298$$

$$h(E_1) = \frac{302}{600} = 50{,}3\,\% = h(2) + h(4) + h(6)$$

$$h(E_2) = \frac{298}{600} = 49{,}7\,\% = h(1) + h(3) + h(5)$$

$$H(1) + H(2) + H(3) + H(4) + H(5) + H(6) = 600$$

$$h(1) + h(2) + h(3) + h(4) + h(5) + h(6) = 1 = 100\,\%$$

Spezialfälle des Zerlegungssatzes:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\} \quad \Longrightarrow$$

$$H(\Omega) = H(\omega_1) + H(\omega_2) + \ldots + H(\omega_n) = N$$

$$h(\Omega) = h(\omega_1) + h(\omega_2) + \ldots + h(\omega_n) = 1$$

$$\boxed{h(E) + h(\overline{E}) = 1}$$

Ein Beispiel für die Stabilisierung der relativen Häufigkeit:

ZE: „Werfen einer Münze“

Das ZE wird 100, 10 000 und 1 000 000 mal durchgeführt, der erwartete Wert für die relativen Häufigkeiten ist 0,5 = 50 %. Die relative Abweichung vom erwarteten Wert ist δ_{rel}:

N		K	Z
	H	44	56
100	h	44 %	56 %
	δ_{rel}	−12 %	+12 %
	H	5041	4959
10^4	h	50,41 %	49,59 %
	δ_{rel}	+0,82 %	−0,82 %
	H	500620	499380
10^6	h	50,062 %	49,938 %
	δ_{rel}	+0,124 %	−0,124 %

Die *Wahrscheinlichkeit* $P(E)$ eines Ereignisses E ist der Stabilisierungswert von $h(E)$ mit $N \to \infty$.

In der Realität können Wahrscheinlichkeiten nur näherungsweise bestimmt werden, indem man ein Zufallsexperiment sehr oft wiederholt!

Definitionen und Regeln

Vierfeldertafel

Oft wird eine Menge, z.B. ein Ergebnisraum Ω, nach zwei Kriterien zerlegt:

$$\Omega = A \cup \overline{A} = B \cup \overline{B}$$

Die Mächtigkeiten der Teilmengen schreibt man übersichtlich in einer *Vierfeldertafel* zusammen:

Ω	A	$\overline{A}$	
B	$\lvert A\cap B\rvert$	$\lvert \overline{A}\cap B\rvert$	$\lvert B\rvert$
$\overline{B}$	$\lvert A\cap \overline{B}\rvert$	$\lvert \overline{A}\cap \overline{B}\rvert$	$\lvert \overline{B}\rvert$
	$\lvert A\rvert$	$\lvert \overline{A}\rvert$	$\lvert \Omega\rvert$

Dabei gelten die Summenregeln:

$$\begin{aligned} |A\cap B| + |\overline{A}\cap B| &= |B| \\ |A\cap \overline{B}| + |\overline{A}\cap \overline{B}| &= |\overline{B}| \\ |A| + |\overline{A}| &= |\Omega| \\ |A\cap B| + |A\cap \overline{B}| &= |A| \\ |\overline{A}\cap B| + |\overline{A}\cap \overline{B}| &= |\overline{A}| \\ |B| + |\overline{B}| &= |\Omega| \end{aligned}$$

Dividiert man jeden Eintrag in der Vierfeldertafel für Mächtigkeiten durch $|\Omega|$, dann erhält man die Vierfeldertafel für *Anteile* bzw. relative Häufigkeiten:

Ω	A	$\overline{A}$	
B	a	b	$a+b$
$\overline{B}$	c	d	$c+d$
	$a+c$	$b+d$	$a+b+c+d=1$

Die Wahrscheinlichkeit

Jedem Ereignis E eines Zufallsexperiments mit dem Ergebnisraum Ω ist eine Wahrscheinlichkeit $P(E)$ zugeordnet, die folgenden Regeln genügt:

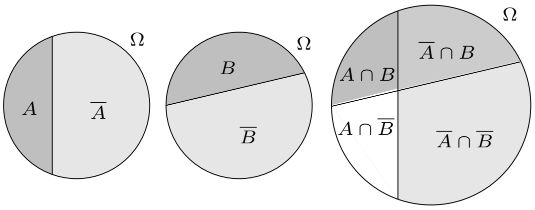
$$\boxed{P(\emptyset) = 0} \qquad \boxed{P(\Omega) = 1} \qquad \boxed{0 \leqq P(E) \leqq 1}$$

Wahrscheinlichkeiten liegen immer im Intervall von 0 bis 1 bzw. von 0 bis 100 %.

Ist $\mathcal{Z} = \{E_1, E_2, \ldots, E_r\}$ eine Zerlegung von Ω, dann gilt (Zerlegungssatz)

$$P(E_1) + P(E_2) + \ldots + P(E_r) = 1$$

Beispiele



In einer Klasse mit Buben (B) und Mädchen ($\overline{B}$) gibt es Sportler (S) und Nichtsportler ($\overline{S}$). Ein Fünftel der Klasse sind sportliche Buben, 30 % der Klasse unsportliche Mädchen. Insgesamt sind 70 % unsportliche Kinder in der Klasse und drei sporttreibende Mädchen.

Vierfeldertafel der Anteile (relativen Häufigkeiten), das fett Gedruckte sind die gegebenen Werte (rechts unten muss 100 % stehen), die anderen Werte folgen aus den Summenregeln:

Ω	B	$\overline{B}$	
S	**20 %**	10 %	30 %
$\overline{S}$	40 %	**30 %**	**70 %**
	60 %	40 %	**100 %**

Vierfeldertafel der Mächtigkeiten (absoluten Häufigkeiten):

$$10\,\% \cdot \text{Gesamtzahl} = 3 \quad \Longrightarrow \quad \text{Gesamtzahl} = 30$$

Ω	B	$\overline{B}$	
S	6	**3**	9
$\overline{S}$	12	9	21
	18	12	30

In Anlehnung an die Regeln für relative Häufigkeiten definiert man die Wahrscheinlichkeit axiomatisch, d.h. durch die Vorgabe von nicht beweisbaren Fundamentalsätzen (Axiomen). Allerdings können wir an dieser Stelle noch kein vollständiges und minimales Axiomensystem einführen.

Auch für Wahrscheinlichkeiten verwenden wir die vereinfachte Schreibweise

$$P(\{\omega\}) = P(\omega)$$

Die Wahrscheinlichkeit des Ergebnisses ω ist also gleich der Wahrscheinlichkeit des Elementarereignisses $\{\omega\}$.

Definitionen und Regeln

Spezialfälle des Zerlegungssatzes:

$$\boxed{\begin{array}{l}\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\} \quad \Longrightarrow \\[1ex] P(\Omega) = P(\omega_1) + P(\omega_2) + \ldots + P(\omega_n) = 1\end{array}}$$

$$\boxed{P(E) + P\left(\overline{E}\right) = 1}$$

oder

$$\boxed{P\left(\overline{E}\right) = 1 - P(E)}$$

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses $E = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r\}$ ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse von E:

$$P(E) = P(\omega_1) + P(\omega_2) + \ldots + P(\omega_r)$$

Laplace-Experimente

Ein Zufallsexperiment, bei dem jedes Ergebnis (Elementarereignis) die gleiche Wahrscheinlichkeit p besitzt, heißt *Laplace-Experiment.*

Für ein Ergebnis ω eines Laplace-Experiments mit $n = |\Omega|$ folgt aus dem Zerlegungssatz

$$\underbrace{\underbrace{P(\omega_1)}_{p} + \underbrace{P(\omega_2)}_{p} + \ldots + \underbrace{P(\omega_n)}_{p}}_{n \cdot p} = 1$$

$$\boxed{p = P(\omega) = \frac{1}{n} = \frac{1}{|\Omega|}}$$

Für ein Ereignis $E = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r\}$ eines Laplace-Experiments folgt dann

$$\boxed{P(E) = \frac{r}{n} = \frac{|E|}{|\Omega|} = p \cdot |E|}$$

Bei einem Zufallsexperiment ist $n = |\Omega|$ die Zahl der *möglichen* und $|E|$ die Zahl der für das Eintreten von E *günstigen* Ergebnisse. Für ein Laplace-Experiment gilt also

$$\boxed{P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{\text{„Zahl der Günstigen“}}{\text{„Zahl der Möglichen“}}}$$

Beispiele

Zusammenhang zwischen Wahrscheinlichkeit und Experiment:

Wird ein Zufallsexperiment N-mal durchgeführt, dann ist die relative Häufigkeit des Eintretens eines Ereignisses E ungefähr gleich der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses:

$$h(E) = \frac{H(E)}{N} \approx P(E)$$

Für die absolute Häufigkeit gilt also

$$H(E) \approx N \cdot P(E)$$

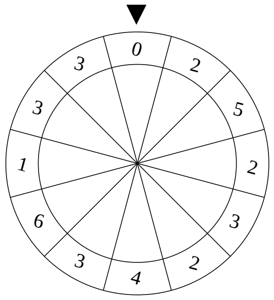
$N \cdot P(E)$ nennt man den *Erwartungswert* der absoluten Häufigkeit von E.
Die relative Abweichung

$$\delta_{\text{rel}} = \frac{h(E) - P(E)}{P(E)} = \frac{H(E) - N \cdot P(E)}{N \cdot P(E)}$$

ist umso kleiner, je größer N ist.

Ein Würfel, bei dem jede Zahl mit der gleichen Wahrscheinlichkeit geworfen wird, heißt *Laplace-Würfel* oder kurz *L-Würfel.* Beim Laplace-Würfel ist die Wahrscheinlichkeit eines Elementarereignisses $p = \frac{1}{6}$. Wird ein Laplace-Würfel z.B. $N = 600$ mal geworfen, erwartet man , dass jede Zahl $Np = 100$ mal erscheint.

Wird das abgebildete Glücksrad einmal gedreht, bleibt es bei jedem Kreissektor mit der gleichen Wahrscheinlichkeit p stehen. Da es 12 Sektoren sind, ist $p = \frac{1}{12}$.



$$E_s: \text{ „Die Zahl } s \text{ erscheint.“}$$

Da die 3 viermal und die 2 dreimal vorkommt, ist $|E_3| = 4$ und ist $|E_2| = 3$:

$$P(E_2) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}, \quad P(E_3) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$P(E_0) = P(E_1) = P(E_4) = P(E_5) = P(E_6) = \frac{1}{12}$$

Probe (Zerlegungssatz):

$$P(E_0) + P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + P(E_4) + \\ + P(E_5) + P(E_6) = 5 \cdot \frac{1}{12} + \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = 1$$

Definitionen und Regeln

Berechnung von Mächtigkeiten

Um Laplace-Wahrscheinlichkeiten zu berechnen, muss man die Mächtigkeiten vom Ergebnisraum Ω und von Ereignissen bestimmen.

Aus s Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_s$ wird je ein Element gewählt und geordnet nebeneinander gestellt: Man bildet ein *geordnetes s-Tupel*

$$(a_1, a_2, \ldots, a_s)$$

Geordnet bedeutet, dass das erste Element aus A_1 ($a_1 \in A_1$), das zweite aus A_2 ist usw.

Mit den Elementen aus den s Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_s$ kann man genau

$$|A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_s|$$

verschiedene s-Tupel bilden (*Zählprinzip*).

Verteilen sich n Personen auf n nummerierte Plätze, dann hat die erste Person n Plätze zur Auswahl, die zweite noch $n-1$ Plätze (einer ist schon besetzt) usw. Nach dem Zählprinzip gibt es dann $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$ verschiedene Anordnungen.

n unterscheidbare Objekte lassen sich auf

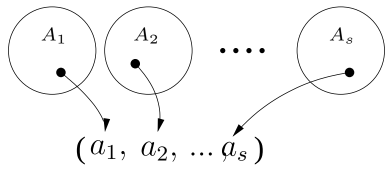
$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$$

verschiedene Arten auf n Plätze verteilen.

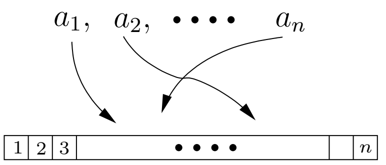
$n!$ spricht man „n Fakultät“.

$$0! = 1$$
$$1! = 1$$
$$2! = 1 \cdot 2 = 2$$
$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$
$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

Beispiele



Bildung eines s-Tupels.



Verteilung von n verschiedenen Objekten auf n Plätze.

Beispiel: Lotto „6 aus 49“

Aus einer Urne mit 49 Kugeln werden 6 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Das geht auf

$$m = 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 = 10\,068\,347\,520$$

Arten. Die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer bestimmten Zahlenreihenfolge ist also $p = \frac{1}{m}$. Beim Lotto ist es gleichgültig, in welcher Reihenfolge die Zahlen gezogen werden. Für jede gezogene Zahlenmenge (z.B. $\{1,2,3,4,5,6\}$) gibt es $6!$ verschiedene Möglichkeiten, wie sie gezogen werden kann. Die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer bestimmten Zahlenmenge (Ereignis E) ist also

$$P(E) = \frac{6!}{10\,068\,347\,520} = \frac{1}{13\,983\,816}$$

Damit gibt es 13 983 816 verschiedene Arten, einen Lottoschein auszufüllen.

Eine Urne enthält n Kugeln, die mit den Zahlen von 1 bis n bedruckt sind.

Aus der Urne zieht man der Reihe nach s Kugeln, notiert die Zahl und legt sie jedesmal wieder zurück (Ziehen mit Zurücklegen). Da man bei jedem Ziehen n Möglichkeiten hat, geht das auf n^s Arten.

Aus der Urne zieht man der Reihe nach s Kugeln, ohne sie wieder zurück zu legen (Ziehen ohne Zurücklegen). Das geht auf

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-s+1)$$

Arten.

Eine andere Formulierung der Urnenregeln:

Aus den Elementen einer Menge der Mächtigkeit n kann man n^s geordnete s-Tupel mit Wiederholung bilden.

„Mit Wiederholung“ bedeutet, dass das gleiche Element mehrmals vorkommen darf.

Aus den Elementen einer Menge der Mächtigkeit n kann man

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-s+1)$$

geordnete s-Tupel ohne Wiederholung bilden.

Geometrie

Definitionen und Regeln

Ähnlichkeit

Die zentrische Streckung

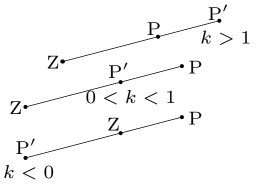
Eine *zentrische Streckung* (Z|k) mit dem Zentrum Z und dem Streckungsfaktor $k \neq 0$ ordnet jedem Punkt P der Ebene einen Bildpunkt P′ nach folgenden Regeln zu:

$\mathrm{P'} \in \mathrm{ZP}$

$\overline{\mathrm{ZP'}} = k \cdot \overline{\mathrm{ZP}}$

$\mathrm{P'} \in [\mathrm{ZP}$ für $k > 0$

$\mathrm{P'} \notin [\mathrm{ZP}$ für $k < 0$



Eine zentrische Streckung bildet eine Gerade g auf eine dazu parallele Gerade g' ab, d.h. die Bildpunkte aller Punkte einer Geraden g bilden wieder eine Gerade g', die zu g parallel ist.

Eine zentrische Streckung (Z|k) bildet eine Strecke [AB] auf eine dazu parallele Strecke [A'B'] mit $\overline{\mathrm{A'B'}} = |k| \cdot \overline{\mathrm{AB}}$ ab.

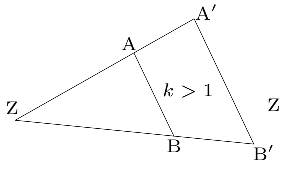
Eine zentrische Streckung (Z|k) bildet einen Kreis k(M|r) auf einen Kreis k'(M′|r') mit $r' = |k| \cdot r$ ab.

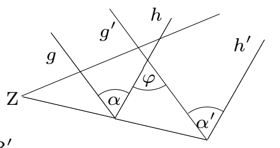
Eine zentrische Streckung (Z|k) bildet eine Figur mit der Fläche A auf eine Figur mit der Fläche $A' = k^2 A$ ab.

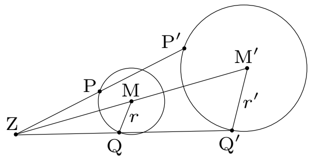
Eine zentrische Streckung ist *winkeltreu*, d.h. eine Figur wird auf eine Bildfigur mit gleichen Winkeln abgebildet.

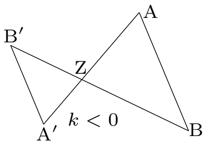
Eine zentrische Streckung (Z|k) mit $k = -1$ ist eine Punktspiegelung an Z.

Zur Punktspiegelung siehe S. 35.







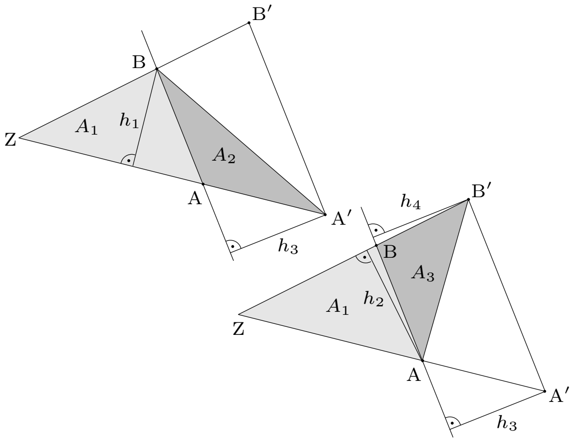


$g \parallel g'$ und $h \parallel h' \quad \Longrightarrow \quad \alpha' = \varphi = \alpha$

Beispiele

Die wichtigsten Beweise für die links stehenden Sätze:

Die zentrische Streckung (Z|k) bildet A auf A′ und B auf B′ ab, d.h. $\overline{\mathrm{ZA'}} = k \cdot \overline{\mathrm{ZA}}$ und $\overline{\mathrm{ZB'}} = k \cdot \overline{\mathrm{ZB}}$. Für die Dreiecksflächen gilt:



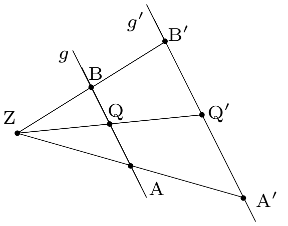
$$A_1 + A_2 = A_{\mathrm{ZA'B}} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{ZA'}}h_1 = k \cdot \frac{1}{2}\overline{\mathrm{ZA}}h_1 = kA_1$$

$$A_1 + A_3 = A_{\mathrm{ZB'A}} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{ZB'}}h_2 = k \cdot \frac{1}{2}\overline{\mathrm{ZB}}h_2 = kA_1$$

$$\Longrightarrow \quad A_2 = A_3 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}h_3 = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}h_4$$

$$\Longrightarrow \quad h_3 = h_4 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{AB} \parallel \mathrm{A'B'}$$

$\mathrm{A} \xrightarrow{(\mathrm{Z}|k)} \mathrm{A'}$, $\mathrm{B} \xrightarrow{(\mathrm{Z}|k)} \mathrm{B'}$
$g = \mathrm{AB}$, $g' = \mathrm{A'B'}$
$\mathrm{Q} \in g$, $\mathrm{Q} \xrightarrow{(\mathrm{Z}|k)} \mathrm{Q'}$
$\mathrm{A'Q'} \parallel \mathrm{AQ} \parallel \mathrm{AB} \parallel \mathrm{A'B'}$
$\Longrightarrow \mathrm{Q'} \in g'$

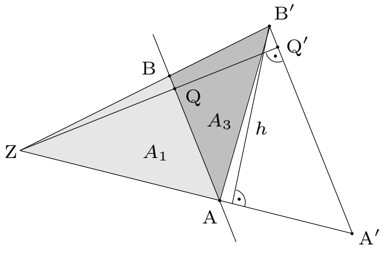


$$A_{\mathrm{ZA'B'}} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{ZA'}}\,h = k \cdot \frac{1}{2}\overline{\mathrm{ZA}}\,h = k \cdot A_{\mathrm{ZAB'}} = k^2 A_1$$

$$A_{\mathrm{ZA'B'}} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{A'B'}} \cdot \overline{\mathrm{ZQ'}} = k \cdot \frac{1}{2}\overline{\mathrm{A'B'}} \cdot \overline{\mathrm{ZQ}} \quad \Longrightarrow$$

$$k^2 \cdot \frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}} \cdot \overline{\mathrm{ZQ}} = k \cdot \frac{1}{2}\overline{\mathrm{A'B'}} \cdot \overline{\mathrm{ZQ}} \quad \Longrightarrow$$

$$\overline{\mathrm{A'B'}} = k \cdot \overline{\mathrm{AB}}$$



Definitionen und Regeln

Die Strahlensätze

Zwei sich in Z schneidende Geraden g und h werden von mehreren parallelen Geraden geschnitten (AB ∥ CD ∥ EF):

Die Streckenlängen auf g verhalten sich wie die entsprechenden Streckenlängen auf h:

$$\frac{\overline{\mathrm{ZB}}}{\overline{\mathrm{ZA}}} = \frac{\overline{\mathrm{ZB'}}}{\overline{\mathrm{ZA'}}}, \quad \frac{\overline{\mathrm{ZA}}}{\overline{\mathrm{AB}}} = \frac{\overline{\mathrm{ZA'}}}{\overline{\mathrm{A'B'}}}, \quad \frac{\overline{\mathrm{ZA}}}{\overline{\mathrm{ZC}}} = \frac{\overline{\mathrm{ZA'}}}{\overline{\mathrm{ZC'}}}$$

Die Verhältnisse einer Strecke auf g zu einer entsprechenden Strecke auf h sind alle gleich:

$$\frac{\overline{\mathrm{ZA}}}{\overline{\mathrm{ZA'}}} = \frac{\overline{\mathrm{ZB}}}{\overline{\mathrm{ZB'}}} = \frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{A'B'}}} = \frac{\overline{\mathrm{ZC}}}{\overline{\mathrm{ZC'}}} = \frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{A'C'}}} = \frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{B'C'}}}$$

Die Längen der Abschnitte auf den Parallelen verhalten sich wie die entsprechenden Strecken von Z zu den Parallelen:

$$\frac{\overline{\mathrm{BB'}}}{\overline{\mathrm{AA'}}} = \frac{\overline{\mathrm{ZB}}}{\overline{\mathrm{ZA}}} = \frac{\overline{\mathrm{ZB'}}}{\overline{\mathrm{ZA'}}}, \quad \frac{\overline{\mathrm{CC'}}}{\overline{\mathrm{AA'}}} = \frac{\overline{\mathrm{ZC}}}{\overline{\mathrm{ZA}}} = \frac{\overline{\mathrm{ZC'}}}{\overline{\mathrm{ZA'}}}$$

Beweis der Strahlensätze:

Die zentrische Streckung $(\mathrm{Z}|k)$ bildet A auf B ab, d.h. $k = \frac{\overline{\mathrm{ZB}}}{\overline{\mathrm{ZA}}}$. Das Bild von A′ unter dieser Streckung sei B″. Da BB″ ∥ AA′ (Streckung) und BB′ ∥ AA′ (Voraussetzung), ist B″ = B′. Aus den Eigenschaften der zentrischen Streckung folgt dann

$$k = \frac{\overline{\mathrm{ZB}}}{\overline{\mathrm{ZA}}} = \frac{\overline{\mathrm{ZB'}}}{\overline{\mathrm{ZA'}}} = \frac{\overline{\mathrm{BB'}}}{\overline{\mathrm{AA'}}}$$

$$\frac{\overline{\mathrm{ZB}}}{\overline{\mathrm{ZA}}} = \frac{\overline{\mathrm{ZB'}}}{\overline{\mathrm{ZA'}}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\overline{\mathrm{ZB}}}{\overline{\mathrm{ZB'}}} = \frac{\overline{\mathrm{ZA}}}{\overline{\mathrm{ZA'}}}$$

$$\frac{\overline{\mathrm{ZB}}}{\overline{\mathrm{ZA}}} = \frac{\overline{\mathrm{ZB'}}}{\overline{\mathrm{ZA'}}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{a+b}{a} = \frac{a'+b'}{a'}$$

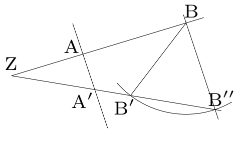
$$\Longrightarrow \quad 1+\frac{b}{a} = 1+\frac{b'}{a'} \quad \Longrightarrow \quad \frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}$$

Eine Umkehrung der Strahlensätze (folgt direkt aus den Eigenschaften der zentrischen Streckung):

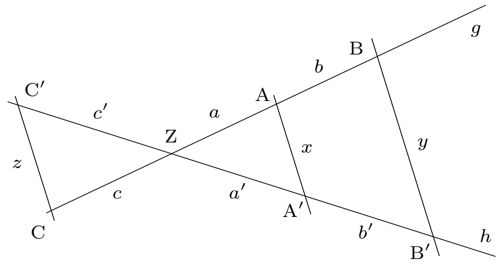
$\mathrm{Z} = g \cap h$, $\mathrm{A} \in g$, $\mathrm{A'} \in [\mathrm{ZA}$, $\mathrm{B} \in h$, $\mathrm{B'} \in [\mathrm{ZB}$

Wenn $\frac{\overline{\mathrm{ZB}}}{\overline{\mathrm{ZA}}} = \frac{\overline{\mathrm{ZB'}}}{\overline{\mathrm{ZA'}}}$, dann ist AB ∥ A′B′.

Nicht jede Umkehrung der Strahlensätze ist richtig: Aus $\frac{\overline{\mathrm{ZB}}}{\overline{\mathrm{ZA}}} = \frac{\overline{\mathrm{BB'}}}{\overline{\mathrm{AA'}}}$ folgt nicht AB ∥ A′B′!

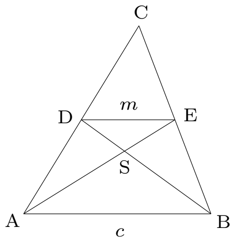


Beispiele



Anwendungen der Strahlensätze:

Im ΔABC ist D der Mittelpunkt von [AC] und E der Mittelpunkt von [BC]. S ist der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden [AE] und [BD]. Aus den Strahlensätzen folgt: $\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{DE}}} = \frac{\overline{\mathrm{CA}}}{\overline{\mathrm{CD}}} = \frac{1}{2}$



Die Mittellinie [DE] in einem Dreieck ist parallel zur Grundlinie [AB] und $\overline{\mathrm{DE}} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}$.

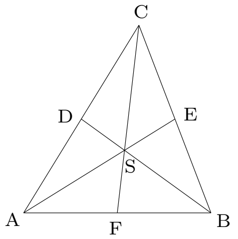
$$\frac{\overline{\mathrm{SD}}}{\overline{\mathrm{SB}}} = \frac{\overline{\mathrm{SE}}}{\overline{\mathrm{SA}}} = \frac{\overline{\mathrm{DE}}}{\overline{\mathrm{AB}}} = \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad \overline{\mathrm{AS}} = 2\cdot\overline{\mathrm{SE}} = \tfrac{2}{3}\cdot\overline{\mathrm{AE}}$$

Ist T den Schnittpunkt T von AE und EF, dann folgt genauso:

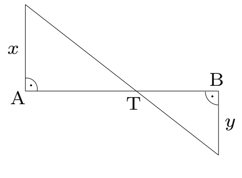
$\overline{\mathrm{AT}} = 2\cdot\overline{\mathrm{TE}} = \frac{2}{3}\cdot\overline{\mathrm{AT}}$

Also ist T = S.

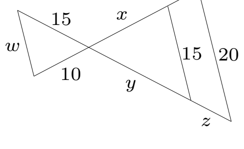


Die drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt, dem *Schwerpunkt* S, der die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2 : 1 teilt.

Nebenstehende Abbildung zeigt, wie man eine Strecke [AB] durch Konstruktion im Verhältnis $x : y$ teilt:



$$\frac{\overline{\mathrm{AT}}}{\overline{\mathrm{TB}}} = \frac{x}{y}$$



$$\frac{x+4}{x} = 1+\frac{4}{x} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{4}{x} = \frac{1}{3} \Longrightarrow x = 12$$

$$\frac{y}{x} = \frac{y}{12} = \frac{15}{10} \Longrightarrow y = 18$$

$$\frac{z}{4} = \frac{y}{x} = \frac{18}{12} \Longrightarrow x = 6$$

$$\frac{w}{10} = \frac{15}{x} = \frac{15}{12} \Longrightarrow x = 12{,}5$$

Definitionen und Regeln

Die Ähnlichkeit

Zwei Figuren F und F' heißen *ähnlich* zueinander ($F \sim F'$), wenn es eine zentrische Streckung $(Z|k)$ gibt, die F in eine zu F' kongruente Figur F'' abbildet.

Zwischen ähnliche Figuren schreibt man das Zeichen $\sim$.

In ähnlichen Figuren sind entsprechende Winkel und entsprechende Streckenverhältnisse gleich.

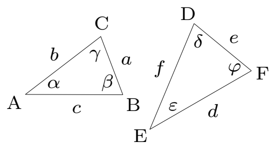
Ähnlichkeitssätze für Dreiecke:

Zwei Dreiecke sind bereits ähnlich, wenn sie in zwei Winkeln übereinstimmen (ww).

$\alpha = \varepsilon,\ \beta = \varphi \quad \Longrightarrow$

$\Delta\mathrm{ABC} \sim \Delta\mathrm{EFD} \quad \Longrightarrow$

$\dfrac{a}{e} = \dfrac{b}{f} = \dfrac{c}{d}$

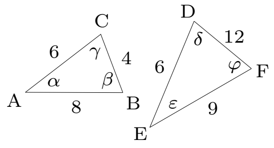


Zwei Dreiecke sind bereits ähnlich, wenn die drei Seitenverhältnisse gleich sind (sss).

$\dfrac{f}{a} = \dfrac{d}{b} = \dfrac{e}{c} = 1{,}5 \quad \Longrightarrow$

$\Delta\mathrm{ABC} \sim \Delta\mathrm{FDE} \quad \Longrightarrow$

$\alpha = \varphi,\ \beta = \delta,\ \gamma = \varepsilon$

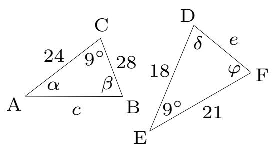


Zwei Dreiecke sind bereits ähnlich, wenn sie in einem Winkel und den Verhältnissen der anliegenden Seiten übereinstimmen (sws).

$\dfrac{a}{d} = \dfrac{b}{f} = \dfrac{4}{3},\ \gamma = \varphi \quad \Longrightarrow$

$\Delta\mathrm{ABC} \sim \Delta\mathrm{DFE} \quad \Longrightarrow$

$\alpha = \delta,\ \beta = \varphi,\ \gamma = \varepsilon = 9^\circ$

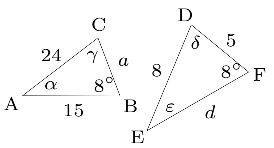


Zwei Dreiecke sind bereits ähnlich, wenn sie in zwei Seitenverhältnissen und dem Gegenwinkel der größeren Seite übereinstimmen (ssW).

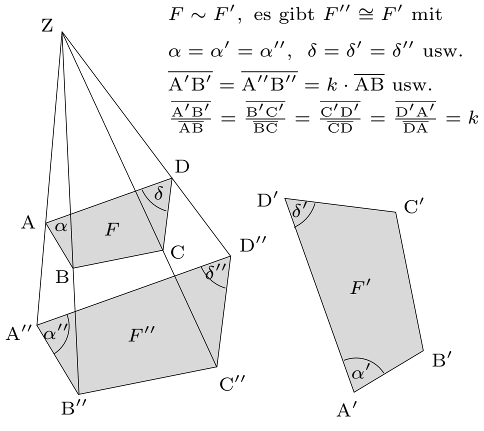
$\dfrac{b}{f} = \dfrac{c}{e} = 3,\ \beta = \varphi \quad \Longrightarrow$

$\Delta\mathrm{ABC} \sim \Delta\mathrm{DFE} \quad \Longrightarrow$

$\alpha = \delta,\ \beta = \varphi,\ \gamma = \varepsilon$



Beispiele



$F \sim F'$, es gibt $F'' \cong F'$ mit

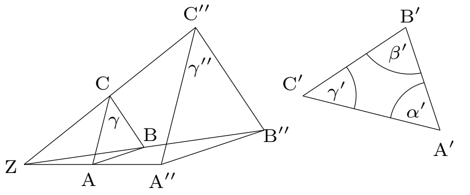
$\alpha = \alpha' = \alpha''$, $\delta = \delta' = \delta''$ usw.

$\overline{\mathrm{A'B'}} = \overline{\mathrm{A''B''}} = k \cdot \overline{\mathrm{AB}}$ usw.

$\frac{\overline{\mathrm{A'B'}}}{\overline{\mathrm{AB}}} = \frac{\overline{\mathrm{B'C'}}}{\overline{\mathrm{BC}}} = \frac{\overline{\mathrm{C'D'}}}{\overline{\mathrm{CD}}} = \frac{\overline{\mathrm{D'A'}}}{\overline{\mathrm{DA}}} = k$

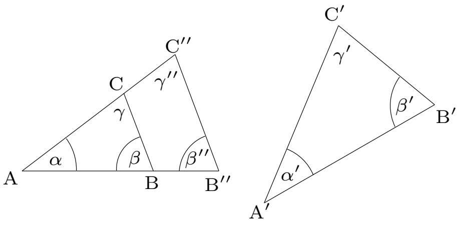
Wir betrachten $\Delta\mathrm{ABC}$ und $\Delta\mathrm{A'B'C'}$ mit

$$\frac{\overline{\mathrm{A'B'}}}{\overline{\mathrm{AB}}} = \frac{\overline{\mathrm{B'C'}}}{\overline{\mathrm{BC}}} = \frac{\overline{\mathrm{C'A'}}}{\overline{\mathrm{CA}}} = k$$



Eine Streckung $(Z|k)$ bildet $\Delta\mathrm{ABC}$ auf $\Delta\mathrm{A''B''C''}$ mit $\overline{\mathrm{A''B''}} = k\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{A'B'}}$, $\overline{\mathrm{B''C''}} = k\overline{\mathrm{BC}} = \overline{\mathrm{B'C'}}$ und $\overline{\mathrm{C''A''}} = k\overline{\mathrm{CA}} = \overline{\mathrm{C'A'}}$ ab. Nach dem sss-Satz ist $\Delta\mathrm{A''B''C''} \cong \Delta\mathrm{A'B'C'}$ und damit nach Definition $\Delta\mathrm{ABC}\sim \Delta\mathrm{A'B'C'}$.

Wir betrachten $\Delta\mathrm{ABC}$ und $\Delta\mathrm{A'B'C'}$ mit $\alpha = \alpha'$ und $\beta = \beta'$.



$\Delta\mathrm{A'B'C'}$ wird durch Drehung und Verschiebung in $\Delta\mathrm{AB''C''}$ überführt ($\Delta\mathrm{AB''C''} \cong \Delta\mathrm{A'B'C'}$) mit $\mathrm{B''} \in [\mathrm{AB}$ und $\mathrm{C''} \in [\mathrm{AC}$. Wegeb $\beta'' = \beta$ ist $\mathrm{B''C''} \parallel \mathrm{BC}$. Die zentrische Streckung $(\mathrm{A}|k)$ mit $k = \frac{\overline{\mathrm{A'B'}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$ führt also $\Delta\mathrm{ABC}$ in $\Delta\mathrm{AB''C''}$ über, d.h. $\Delta\mathrm{A'B'C'} \sim \Delta\mathrm{ABC}$.

Grundwissen Mathematik – Jahrgangsstufe 9

Algebra

Definitionen und Regeln

Binomische Formeln

Binomische Formeln:

$$\boxed{\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2\\(a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2\\(a+b)(a-b) &= a^2-b^2\end{aligned}}$$

Die binomischen Formeln verwendet man hauptsächlich zum Faktorisieren von Summen. Beispiele:

$$x^2-1=x^2-1^2=(x-1)(x+1)$$

$$\begin{aligned}\frac{4x^2-12x+9}{8x^2-18}&=\frac{(2x)^2-2\cdot3\cdot2x+3^2}{2((2x)^2-3^2)}=\\&=\frac{(2x-3)^2}{2(2x-3)(2x+3)}=\frac{2x-3}{2(2x+3)}\end{aligned}$$

Rationale Zahlen

Die Menge der rationalen Zahlen:

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b}\middle|a\in\mathbb{Z}\wedge b\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\right\}$$

Zählt man die endlichen Dezimalbrüche zu den periodischen Dezimalbrüchen (z.B. wegen $0{,}123=0{,}123\overline{0}=0{,}122\overline{9}$), dann gilt:

$$\mathbb{Q}=\{\text{aller periodischen Dezimalbrüche}\}$$

> Zwischen zwei beliebigen rationalen Zahlen liegen noch unendlich viele weiter rationale Zahlen (die rationalen Zahlen liegen *dicht* auf der Zahlengeraden).

$$\boxed{q\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}\quad\Longrightarrow q^2\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}}$$

Wegen $1^2=1<2$ und $2^2=4>2$ hat die Gleichung $x^2=2$ keine ganze Lösung. Wenn $x\in\mathbb{Q}$, dann muss also $x\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ sein. Damit ist aber auch $x^2\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$, d.h. $x^2\neq2$. Es gibt also weder eine ganze noch eine nichtganze rationale Zahl, deren Quadrat 2 ist. Die Menge der rationalen Zahlen ist *unvollständig.*

Beispiele

$$(x+2y)^2=x^2+4xy+4y^2$$

$$\left(a-\frac{b}{2}\right)^2=a^2-ab+\frac{b^2}{4}$$

$$98^2=(100-2)^2=100^2-2\cdot2\cdot100+2^2=9604$$

$$x^2-9=x^2-3^2=(x-3)(x+3)$$

$$\begin{aligned}9x^2-3xa+\frac{a^2}{4}&=(3x)^2-2\cdot3x\cdot\frac{a}{2}+\left(\frac{a}{2}\right)^2=\\&=\left(3x-\frac{a}{2}\right)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^4-1&=\left(x^2\right)^2-1^2=\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)=\\&=(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)\end{aligned}$$

Logische Zeichen: $\boxed{\wedge\text{: „und“,}\quad\vee\text{: „oder“}}$

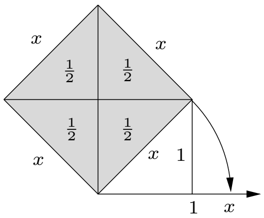
In der folgenden Formel stehen z_1 bis z_n für Ziffern (siehe auch S.15):

$$\boxed{0{,}\overline{z_1...z_n}=\frac{z_1...z_n}{10^n-1}}$$

$$0{,}\overline{9}=\frac{9}{9}=1,\ 0{,}\overline{3}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3},\ 0{,}\overline{123}=\frac{123}{999}=\frac{41}{333}$$

$$\begin{aligned}0{,}023\overline{45}&=\frac{23+0{,}\overline{45}}{1000}=\frac{23+\frac{45}{99}}{1000}=\frac{2345-23}{99000}=\\&=\frac{2322}{99000}=\frac{129}{5500}\end{aligned}$$

$x^2=4\cdot\frac{1}{2}=2$



Es gibt also einen Punkt x auf der Zahlengeraden mit

$$x^2=2$$

$$x^2=2\quad\Longrightarrow\quad x\notin\mathbb{Q}$$

$$\boxed{x\notin\mathbb{Z}\text{ und }x^2\in\mathbb{Z}\quad\Longrightarrow\quad x\notin\mathbb{Q}}$$

Definitionen und Regeln | **Beispiele**

Reelle Zahlen

Ein unendlicher, nichtperiodischer Dezimalbruch heißt *irrational*.

$$\boxed{\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{\text{aller irrationalen Zahlen}\}}$$

$$\boxed{\mathbb{R} = \{\text{aller Dezimalbruche}\}}$$

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \{\text{aller irrationalen Zahlen}\}$$

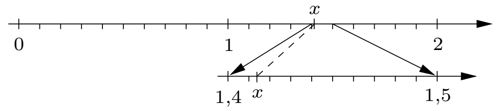
$\mathbb{R}$ ist vollständig, d.h. jeder reellen Zahl entspricht ein Punkt auf der Zahlengeraden und umgekehrt.

Durch eine *Intervallschachtelung* kann man für jeden Punkt auf der Zahlengeraden den dazugehörenden Dezimalbruch konstruieren.

$r = 0{,}101001000100001...$ ist nichtperiodisch, also irrational.

Es gibt einen Punkt $x > 0$ auf der Zahlengeraden mit $x^2 = 2$. Da $x \notin \mathbb{Q}$, ist x irrational.

Intervallschachtelung für x mit $x^2 = 2$:



$$\begin{aligned}
1^2 = 1 < 2 < 4 = 2^2 \quad &\Longrightarrow \quad 1 < x < 2\\
\underbrace{1{,}4^2}_{1{,}96} < 2 < \underbrace{1{,}5^2}_{2{,}25} \quad &\Longrightarrow \quad 1{,}4 < x < 1{,}5\\
\underbrace{1{,}41^2}_{1{,}9881} < 2 < \underbrace{1{,}42^2}_{2{,}0164} \quad &\Longrightarrow \quad 1{,}41 < x < 1{,}42
\end{aligned}$$

usw.

Die Quadratwurzel

Definition und grundlegende Eigenschaften

Für $a \geqq 0$ heißt die nichtnegative Lösung der Gleichung $x^2 = a$ die *Quadratwurzel* (kurz *Wurzel*) aus a, a heißt *Radikand*.

$$\boxed{a \geqq 0 : \ x = \sqrt{a} \iff x^2 = a \wedge x \geqq 0}$$

$$\boxed{\left(\sqrt{a}\right)^2 = a}$$

$$\boxed{x^2 = a \Longrightarrow L = \begin{cases} \{-\sqrt{a}, \sqrt{a}\} & \text{für } a > 0\\ \{0\} & \text{für } a = 0\\ \{\ \} = \emptyset & \text{für } a < 0 \end{cases}}$$

Für $a \geqq 0$ gilt:

$$\boxed{x^2 = a \iff |x| = \sqrt{a} \iff x = \pm\sqrt{a}}$$

$$\boxed{\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{für } a \geqq 0\\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases}}$$

$$\boxed{\sqrt{a^2} = |a|}$$

Unter die Wurzel ziehen:

$$\boxed{a = \begin{cases} \sqrt{a^2} & \text{für } a \geqq 0\\ -\sqrt{a^2} & \text{für } a < 0 \end{cases}}$$

$$\boxed{a = \operatorname{sgn}(a)\sqrt{a^2}}$$

$$\boxed{|x| = x \cdot \operatorname{sgn}(x)}$$

$\sqrt{4} = 2, \quad \sqrt{\frac{16}{81}} = \frac{4}{9}, \quad \sqrt{10^6} = 10^3$

$\sqrt{-9}$ nicht definiert

„Wurzel ziehen“ heißt auch *radizieren.*

Die Wurzel aus einer natürlichen Zahl ist entweder natürlich oder irrational.

$2^2 < 7$ und $3^2 > 7 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{7} \notin \mathbb{N}$

$\sqrt{7}$ ist also irrational.

$x^2 = 9 \quad \Longrightarrow \quad L = \{-3, 3\}$ oder kurz $x = \pm 3$

$x^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad L = \{0\}$

$x^2 = -4 \quad \Longrightarrow \quad L = \{\} = \emptyset$

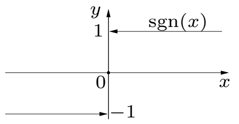
$\sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5, \quad \sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5 = |-5|$

$\sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{(x-2)^2} = |x - 2|$

$3 = \sqrt{3^2}, \quad -7 = -\sqrt{(-7)^2}$

Die Signumfunktion (Vorzeichenfunktion):

$$\boxed{\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0\\ 0 & \text{für } x = 0\\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}}$$



$x\sqrt{\frac{1}{x^2}} = \operatorname{sgn}(x)\sqrt{\frac{x^2}{x^2}} = \operatorname{sgn}(x)$

$x^2 = \sqrt{x^4}, \quad x^3 = \operatorname{sgn}\left(x^3\right)\sqrt{x^6} = \operatorname{sgn}(x)\sqrt{x^6}$

Definitionen und Regeln

Numerische Wurzelberechnung

x_1 sei ein Näherungswert für $\sqrt{a}$. Wir suchen einen besseren Wert $x_2 = x_1 + \Delta x$:

$$x_2^2 = (x_1 + \Delta x)^2 = x_1^2 + 2x_1\Delta x + \Delta x^2 = a$$

Wenn x_1 schon ein einigermaßen guter Näherungswert ist, dann gilt $|\Delta x| \ll x_1$ und damit auch $\Delta x^2 \ll |2x_1\Delta x|$. In obiger Summe kann man also Δx^2 vernachlässigen:

$$x_1^2 + 2x_1\Delta x = a \implies \Delta x = \frac{a}{2x_1} - \frac{x_1}{2}$$

$$\implies \quad x_2 = x_1 + \Delta x = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{a}{x_1}\right)$$

Den besseren Wert x_2 kann man mit der gleichen Formel wieder verbessern usw. (*Rekursion*).

Rekursionsformel zur Berechnung von $x = \sqrt{a}$:

$$\boxed{x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)}$$

(**Newtonverfahren**)

Beim Newtonverfahren verdoppelt sich die Zahl der geltenden Ziffern bei jedem Schritt.

Für $a \approx 1$, d.h. $a = 1 + h$ mit $|h| \ll 1$ folgt mit dem Newtonverfahren und Startwert $x_1 = 1$:

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1+h}{1}\right) = 1 + \frac{h}{2}$$

$$\boxed{\sqrt{1+h} \approx 1 + \frac{h}{2} \quad \text{für } |h| \ll 1}$$

(**Lineare Näherung**)

Mit dem Ansatz $\sqrt{1+h} = 1 + \frac{h}{2} + bh^2$ kann man die lineare Näherung verbessern:

$$\left(1 + \frac{h}{2} + bh^2\right)^2 = 1 + h$$

Unter Vernachlässigung der Terme mit h^3 und h^4 folgt $b = -\frac{1}{8}$, d.h.

$$\boxed{\sqrt{1+h} \approx 1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} \quad \text{für } |h| \ll 1}$$

(**Quadratische Näherung**)

Mit der quadratischen Näherung kann man den relativen Fehler der linearen Näherung abschätzen:

$$\delta_{\text{rel}} = \frac{1 + \frac{h}{2} - \sqrt{1+h}}{\sqrt{1+h}} \approx \frac{h^2}{8}$$

Beispiele

$x = \sqrt{7}$ mit Startwert $x_1 = 2$:

$$x_2 = \frac{1}{2}\cdot\left(x_1 + \frac{7}{x_1}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(2 + \frac{7}{2}\right) = 2{,}75$$

$$2{,}75^2 = 7{,}5625$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\cdot\left(x_2 + \frac{7}{x_2}\right) = 2{,}647727273$$

$$x_3^2 = 7{,}010459711$$

$$x_4 = \frac{1}{2}\cdot\left(x_3 + \frac{7}{x_3}\right) = 2{,}645752048$$

$$x_3^2 = 7{,}000003902$$

$$x_5 = \frac{1}{2}\cdot\left(x_4 + \frac{7}{x_4}\right) = 2{,}645751311$$

$$x_3^2 = 7{,}000000000$$

$$\implies \quad \sqrt{7} \approx 2{,}645751311$$

$$\sqrt{1{,}1} = \sqrt{1 + 0{,}1} \approx 1 + \frac{0{,}1}{2} = 1{,}05$$

TR: $\sqrt{1{,}1} = 1{,}04880885$

$$\delta_{\text{rel}} = \frac{1{,}05 - 1{,}04880885}{1{,}04880885} = 1{,}14 \cdot 10^{-3}$$

Mit der quadratischen Näherung:

$$\sqrt{1{,}1} \approx 1 + \frac{0{,}1}{2} - \frac{0{,}1^2}{8} = 1{,}04875$$

$$\delta_{\text{rel}} = \frac{1{,}04875 - 1{,}04880885}{1{,}04880885} = -5{,}6 \cdot 10^{-5}$$

$$\sqrt{1{,}001} = \sqrt{1 + 0{,}001} \approx 1 + \frac{0{,}001}{2} = 1{,}0005$$

TR: $\sqrt{1{,}001} = 1{,}000499875$

$$\delta_{\text{rel}} = \frac{1{,}0005 - 1{,}000499875}{1{,}000499875} = 1{,}25 \cdot 10^{-7}$$

Für sehr kleine h liefert die lineare Näherung bessere Werte als der Taschenrechner.
Beispiel: Bewegt sich eine Uhr U′ ($\Delta t'$) mit der Geschwindigkeit v an relativ zueinander ruhenden Uhren (Δt) vorbei, dann gilt nach Einstein für die angezeigten Zeitspannen

$$\Delta t' = \Delta t\sqrt{1 - \beta^2} \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{v}{c}$$

($c = 3 \cdot 10^8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ist die Lichtgeschwindigkeit). Mit $\Delta t = 3600\,\text{s}$ und $v = 30\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ist $\beta = 10^{-7}$ und $\beta^2 = 10^{-14}$. Mit dem Taschenrechner ergibt sich

$$\delta t = \Delta t - \Delta t' = \Delta t(1 - \sqrt{1 - \beta^2}) = 0,$$

mit der linearen Näherung

$$\delta t \approx \Delta t\left(1 - \left(1 - \frac{\beta^2}{2}\right)\right) = \Delta t \cdot \frac{\beta^2}{2} = 1{,}8 \cdot 10^{-11}\,\text{s}$$

Definitionen und Regeln	**Beispiele**
Rechenregeln für Wurzeln Für $a \geqq 0$ und $b \geqq 0$ gilt: $\boxed{\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}}$ Für $a \geqq 0$ und $b > 0$ gilt: $\boxed{\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}}$ Im Allgemeinen ist $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ und $\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$ Für $n \in \mathbb{Z}$ (und $a \neq 0$, wenn $n < 0$) gilt: $\boxed{\sqrt{a^{2n}} = \sqrt{(a^n)^2} = \lvert a^n \rvert}$ Für n gerade ist $\lvert a^n \rvert = a^n$.	$\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9}$, aber: $\underbrace{\sqrt{(-4) \cdot (-9)}}_{\sqrt{36}=6} \neq \underbrace{\sqrt{-4} \cdot \sqrt{-9}}_{\text{nicht def.}}$ $\sqrt{8100} = \sqrt{81 \cdot 100} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{100} = 9 \cdot 10 = 90$ $\sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{16}} = \frac{5}{4}$ $\sqrt{0{,}0049} = \sqrt{\frac{49}{10000}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{10000}} = \frac{7}{100}$ $\underbrace{\sqrt{9+16}}_{\sqrt{25}=5} \neq \underbrace{\sqrt{9}+\sqrt{16}}_{3+4=7}$ $\underbrace{\sqrt{169-144}}_{\sqrt{25}=5} \neq \underbrace{\sqrt{169}-\sqrt{144}}_{13-12=1}$ $\sqrt{3^{14}} = 3^7, \quad \sqrt{(-3)^{14}} = \left\lvert (-3)^7 \right\rvert = 3^7$ $\sqrt{a^{22}} = \left\lvert a^{11} \right\rvert, \quad \sqrt{a^{24}} = \left\lvert a^{12} \right\rvert = a^{12}$, da 12 gerade $\sqrt{0{,}00000625} = \sqrt{625 \cdot 10^{-8}} = 25 \cdot 10^{-4}$ $\sqrt{9 \cdot 10^{149}} = \sqrt{90 \cdot 10^{148}} = \sqrt{90} \cdot 10^{74}$
Umformen von Wurzeltermen Beim Umformen eines Wurzelterms $T = \sqrt{R(a,b,...)}$ muss man peinlich auf die Definitionsmenge D_T des Terms achten, die aus der Bedingung $R(a,b,...) \geqq 0$ folgt. Beispiel: $T = \sqrt{a^3b^4c^2}$ $a^3 \underbrace{b^4c^2}_{\geqq 0} \geqq 0 \quad \Longrightarrow \quad a \geqq 0,\ b, c$ beliebig $T = \sqrt{a \cdot a^2b^4c^2} = ab^2\lvert c \rvert\sqrt{a}$ Unnötige Betragsstriche im Ergebnis vermeiden! **Nenner rational machen** Der Nenner eines Bruches heißt *rational*, wenn er keine Bruchterme enthält. $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{(\sqrt{a})^2} = \frac{\sqrt{a}}{a} \quad$ für $a > 0$ Auch bei Computern sparen rationale Nenner bei langwierigen Berechnungen viel Rechenzeit! $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$ für $a \geqq 0$, $b \geqq 0$ und $a \neq b$.	Teilweises Radizieren: $\sqrt{90} = \sqrt{9 \cdot 10} = 3\sqrt{10}$ $\sqrt{42336} = \sqrt{2^5 \cdot 3^3 \cdot 7^2} = 4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot \sqrt{6} = 84\sqrt{6}$ Beispiel: $T = \sqrt{a^3b^5}$ $a^3b^5 = ab\underbrace{a^2b^4}_{\geqq 0} \geqq 0 \quad \Longrightarrow \quad ab \geqq 0$ $\Longrightarrow (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$ $T = \sqrt{a^3b^5} = \lvert a \rvert b^2\sqrt{ab}$ $f(x) = \sqrt{(x+1)(x^2-1)} = \sqrt{(x+1)^2(x-1)}$ $R(x) = \underbrace{(x+1)^2}_{\geqq 0}(x-1) \geqq 0 \Longrightarrow x \geqq 1$ In $D_f = [1, +\infty[$ ist auch $x+1 \geqq 0$, d.h. $f(x) = \lvert x+1 \rvert\sqrt{x-1} = (x+1)\sqrt{x-1}$ $\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(\sqrt{x})^2-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} =$ $= \sqrt{x}+1 \quad$ für $x \geqq 0$ und $x \neq 1$ $\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})} =$ $= \frac{1+2\sqrt{2}+2}{1-2} = -3-2\sqrt{2}$

Definitionen und Regeln

Potenzen mit rationalen Exponenten

Definition

Potenzen mit rationalen Exponenten werden so definiert, dass die bekannten Potenzgesetze für ganze Exponenten weiterhin richtig bleiben (siehe S.48).

Für $a \geqq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ definiert man:

$$\boxed{x = a^{\frac{1}{n}} \quad \Longleftrightarrow \quad x^n = a \quad \text{und} \quad x \geqq 0}$$

$$x^n = a \;\Rightarrow\; L = \begin{cases} \left\{\pm a^{\frac{1}{n}}\right\} & \text{f. } a \geqq 0 \wedge n \text{ ger.} \\ \emptyset = \{\} & \text{f. } a < 0 \wedge n \text{ ger.} \\ \left\{a^{\frac{1}{n}}\right\} & \text{f. } a \geqq 0 \wedge n \text{ unger.} \\ \left\{-|a|^{\frac{1}{n}}\right\} & \text{f. } a < 0 \wedge n \text{ unger.} \end{cases}$$

Für $a \geqq 0$, $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}_0$ definiert man:

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m}$$

Für $a > 0$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und $m \in \mathbb{Z}$ definiert man:

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\left|\frac{m}{n}\right|}\right)^{\operatorname{sgn}\left(\frac{m}{n}\right)} = \begin{cases} a^{\frac{m}{n}} & \text{für } \frac{m}{n} \geqq 0 \\ \frac{1}{a^{\left|\frac{m}{n}\right|}} & \text{für } \frac{m}{n} < 0 \end{cases}}$$

Damit ist a^q für $a > 0$ und $q \in \mathbb{Q}$ definiert.

Warum Potenzen mit rationalen Exponenten und negativen Basen nicht definiert sind:

$$(-8)^{\frac{5}{3}} = \left((-2)^3\right)^{\frac{5}{3}} = (-2)^5 = -32$$

$$(-8)^{\frac{5}{3}} = (-8)^{\frac{10}{6}} = \left((-2)^{30}\right)^{\frac{1}{6}} = \left(2^{30}\right)^{\frac{1}{6}} = 32$$

Widerspruch!

Für $a > 0$ und $p, q \in \mathbb{Q}$ gelten die Potenzgesetze:

$$\boxed{\begin{aligned} a^p \cdot b^p &= (ab)^p \quad ; \quad \frac{a^p}{b^p} = \left(\frac{a}{b}\right)^p \\ a^p \cdot a^q &= a^{p+q} \quad ; \quad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} \\ (a^p)^q &= a^{pq} \end{aligned}}$$

Für $a > 0$ und $q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ gilt:

$$\boxed{x^q = a \quad \Longrightarrow \quad x = a^{\frac{1}{q}}}$$

Beispiele

Gilt das Potenzgesetz $(a^p)^q = a^{pq}$ auch für rationale Exponenten, dann ist

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n} \cdot n} = a^1 = a$$

$8^{\frac{1}{3}} = 2,$ da $2^3 = 8$

$16^{\frac{1}{4}} = 2,$ da $2^4 = 16$ und $2 > 0$

$16^{\frac{1}{4}} \neq -2,$ obwohl $(-2)^4 = 16$ aber $-2 < 0$

$(-8)^{\frac{1}{3}}$ nicht def., obwohl $(-2)^3 = -8\,(-8 < 0)$

$$\begin{aligned} x^4 = 16 &\Longrightarrow L = \{-2, 2\} \\ x^4 = -16 &\Longrightarrow L = \{\} \\ x^3 = 8 &\Longrightarrow L = \{2\} \\ x^3 = -8 &\Longrightarrow L = \{-2\} \end{aligned}$$

Beachte: $-|-8|^{\frac{1}{3}} = -8^{\frac{1}{3}} = -2$

$8^{\frac{2}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 2^2 = 4,\ 16^{\frac{3}{4}} = \left(16^{\frac{1}{4}}\right)^3 = 2^3 = 8$

$$64^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{\left(64^{\frac{1}{6}}\right)^5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$$

$5^{\frac{1}{3}} \cdot 25^{\frac{1}{3}} = (5 \cdot 25)^{\frac{1}{3}} = 125^{\frac{1}{3}} = 5$

$$\frac{729^{\frac{3}{4}}}{9^{\frac{3}{4}}} = \left(\frac{729}{9}\right)^{\frac{3}{4}} = 81^{\frac{3}{4}} = \left(81^{\frac{1}{4}}\right)^3 = 3^3 = 27$$

$3^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{12}} = 3^{\frac{1}{4}+\frac{1}{12}} = 3^{\frac{1}{3}}$

In den folgenden Beispielen ist $a > 0$:

$$\frac{a^{\frac{5}{3}}}{a^{\frac{3}{5}}} = a^{\frac{5}{3}-\frac{3}{5}} = a^{\frac{16}{15}}$$

$$\left(\frac{32}{a^{\frac{8}{3}}}\right)^{-\frac{1}{4}} = \left(\frac{a^{\frac{8}{3}}}{32}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{(2 \cdot 2^4)^{\frac{1}{4}}} = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{2 \cdot 2^{\frac{1}{4}}}$$

$x^3 = 74088 \quad \Longrightarrow \quad x = 74088^{\frac{1}{3}} = (2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^3)^{\frac{1}{3}} = \left(2^3\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(3^3\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(7^3\right)^{\frac{1}{3}} = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$

$$x^{\frac{1}{5}} = \frac{2}{3} \quad \Longrightarrow \quad x = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{\frac{1}{5}}} = \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}$$

$$x^{-\frac{2}{3}} = 9 \quad \Longrightarrow \quad x = 9^{\frac{1}{-\frac{2}{3}}} = 9^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{9^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{27}$$

$$\begin{aligned} x^{\frac{1}{3}} = 2 \cdot x^{\frac{1}{2}} \quad &\Longrightarrow \quad \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{6}} = 2 \\ &\Longrightarrow \quad x = 2^{-6} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64} \end{aligned}$$

Definitionen und Regeln

Wurzelschreibweise

$$a \geqq 0,\ n \in \mathbb{N}: \quad \boxed{\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}}$$

Spezialfall: $\boxed{\sqrt{a} = \sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}}}$

$$a > 0,\ n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{Z}: \quad \boxed{\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m}$$

Allgemein gilt für $n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{Z}$:

$$\boxed{\sqrt[n]{x^m} = \begin{cases} |x|^{\frac{m}{n}} & , m \text{ ger.}, m \geqq 0,\ D = \mathbb{R} \\ |x|^{\frac{m}{n}} & , |m| \text{ ger.}, m < 0,\ D = \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ x^{\frac{m}{n}} & , m \text{ unger.}, m > 0,\ D = \mathbb{R}_0^+ \\ x^{\frac{m}{n}} & , |m| \text{ unger.}, m < 0,\ D = \mathbb{R}^+ \end{cases}}$$

Vereinfachung von Wurzeltermen auf dem Umweg über die Potenzschreibweise und Anwendung der Potenzgesetze!

Numerische Berechnung der n-ten Wurzel

Ausgangspunkt zur Herleitung einer Iterationsformel ist die Beziehung

$$x = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \quad \Longleftrightarrow \quad x^n = a$$

x_k ist ein Näherungswert für x, d.h.

$$x = x_k + \varepsilon \quad \text{mit} \quad |\varepsilon| \ll 1$$

Es gilt die Näherungsformel

$$\boxed{(1+h)^n \approx 1 + nh \quad \text{mit} \quad |h| \ll 1}$$

Damit erhält man

$$a = x^n = (x_k + \varepsilon)^n = \left[x_k\left(1 + \frac{\varepsilon}{x_k}\right)\right]^n \approx$$

$$\approx x_k^n\left(1 + \frac{n\varepsilon}{x_k}\right) = x_k^n + nx_k^{n-1}\varepsilon$$

$$\varepsilon \approx \frac{a - x_k^n}{nx_k^{n-1}} = \frac{a}{nx_k^{n-1}} - \frac{x_k}{n}$$

Besserer Näherungswert für x:

$$x_{k+1} = x_k + \frac{a}{nx_k^{n-1}} - \frac{x_k}{n}$$

oder

$$\boxed{x_{k+1} = \frac{1}{n}\left[(n-1)x_k + \frac{a}{x_k^{n-1}}\right]}$$

Beispiele

$$\sqrt[3]{(-2)^6} = \sqrt[3]{2^6} = 2^2 = (-2)^2 = (-2)^{\frac{6}{3}},\ \tfrac{6}{3} \in \mathbb{N}!!$$

aber: $\left(\sqrt[3]{-2}\right)^6$ nicht definiert!

$$\sqrt[3]{(-2)^8} = \sqrt[3]{2^8} = 2^{\frac{8}{3}} \neq \underbrace{(-2)^{\frac{8}{3}}}_{\text{nicht def.!}}$$

$$\sqrt[5]{x^4} = |x|^{\frac{4}{5}} \text{ in } D = \mathbb{R}, \qquad \sqrt[4]{x^5} = x^{\frac{5}{4}} \text{ in } D = \mathbb{R}_0^+$$

$$\sqrt[4]{x^6} = |x|^{\frac{3}{2}} \text{ in } D = \mathbb{R}, \qquad \sqrt[4]{x^8} = x^2 \text{ in } D = \mathbb{R}$$

$$\sqrt[4]{x^{-5}} = x^{-\frac{5}{4}} = \frac{1}{x^{\frac{5}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{x^5}} \quad \text{in} \quad D = \mathbb{R}^+$$

$$\sqrt[5]{x^{-6}} = |x|^{-\frac{6}{5}} = \frac{1}{|x|^{\frac{6}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{x^6}} \quad \text{in } D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$a > 0: \quad \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{a}} = \frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{4}}} = a^{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{a}$$

Ist V das Volumen und A die Oberfläche eines Würfels der Kantenlänge a, dann gilt

$$V = a^3 \quad \Longrightarrow \quad a = V^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{V}$$

$$A = 6a^2 = 6 \cdot \left(V^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 6V^{\frac{2}{3}} = 6\sqrt[3]{V^2}$$

$$V^{\frac{2}{3}} = \frac{A}{6} \quad \Longrightarrow \quad V = \left(\frac{A}{6}\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{A^3}{216}} = \frac{A}{6}\sqrt{\frac{A}{6}}$$

Test der Näherungsformel $(1+h)^n \approx 1 + nh$ für $n = 5$.

Der relative Fehler der Näherung ist

$$\delta_{\text{rel}} = \frac{1 + 5h - (1+h)^5}{(1+h)^5}$$

h	$(1+h)^5$	$1+5h$	δ_{rel}
0,1	1,61051	1,5	6,9 %
0,01	1,05101	1,05	0,096 %
0,001	1,00501001	1,005	0,001 %

Berechnung von $x = \sqrt[5]{3}$:

$$x_{k+1} = \frac{1}{5}\left[4x_k + \frac{3}{x_k^4}\right], \qquad x_1 = 1$$

$$x_2 = \frac{1}{5}\left[4 + \frac{3}{1^4}\right] = 1{,}4$$

$$x_3 = \frac{1}{5}\left[4 \cdot 1{,}4 + \frac{3}{1{,}4^4}\right] = 1{,}276184923$$

$$x_4 = \frac{1}{5}\left[4x_3 + \frac{3}{x_3^4}\right] = 1{,}247150132$$

$$x_5 = \frac{1}{5}\left[4x_4 + \frac{3}{x_4^4}\right] = 1{,}245734166$$

$$x_6 = \frac{1}{5}\left[4x_5 + \frac{3}{x_5^4}\right] = 1{,}245730940$$

Probe: $(x_6)^5 = 3{,}000\,000\,005$

Definitionen und Regeln

Quadratische Gleichungen

Eine Gleichung der Form

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \text{(I)}$$

mit $a \neq 0$ heißt *quadratische* Gleichung.
Normierte Form der Gleichung:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Quadratische Ergänzung:

$$x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

Anwendung der binomischen Formel:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \frac{D}{4a^2}$$

mit $D = b^2 - 4ac$. Da $4a^2 > 0$, ist

$$L = \begin{cases} \{\} & \text{für } D < 0 \\ \left\{-\frac{b}{2a}\right\} & \text{für } D = 0 \\ \left\{-\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right\} & \text{für } D > 0 \end{cases}$$

Für $D > 0$ hat (I) also die beiden Lösungen

$$x_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{und}$$
$$x_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Die Lösungen der normalisierten Gleichung

$$x^2 + bx + c = 0 \qquad \text{(II)}$$

$(a = 1)$ sind für $b^2 - 4c > 0$:

$$x_1 = -\frac{b}{2} + \frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{2} \quad \text{und}$$
$$x_2 = -\frac{b}{2} - \frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

Daraus folgt der Satz von VIETA:

> Hat die Gleichung $x^2 + bx + c = 0$ zwei Lösungen x_1 und x_2, dann gilt
>
> $$x_1 + x_2 = -b \quad \text{und} \quad x_1 \cdot x_2 = c$$
>
> $$x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)$$

Einfache Lösung von (I), wenn $c = 0$:

$ax^2 + bx = x\,(ax + b) = 0$

$\Longrightarrow \quad x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{b}{a}$

Beispiele

$$x^2 - x - 6 = 0$$
$$x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$
$$\left|x - \frac{1}{2}\right| = \frac{5}{2}$$
$$x - \frac{1}{2} = \pm\frac{5}{2}$$
$$x = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$$
$$x_1 = 3 \quad x_2 = -2$$
$$L = \{-2; 3\}$$

$$3x^2 - 5x - 7 = 0$$
$$x^2 - 2 \cdot \frac{5}{6} \cdot x + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{7}{3} + \left(\frac{5}{6}\right)^2$$
$$\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{109}{36}$$
$$x = \frac{5}{6} \pm \frac{\sqrt{109}}{6}$$
$$L = \left\{\frac{5 + \sqrt{109}}{6}; \frac{5 - \sqrt{109}}{6}\right\}$$

$$x^2 - 12x + 35 = 0$$

Wegen $5 + 7 = -(-12)$ und $5 \cdot 7 = 35$ ist

$$x_1 = 5 \text{ und } x_2 = 7$$

und es gilt

$$x^2 - 12x + 35 = (x - 5)(x - 7)$$

Biquadratische Gleichung:

$$x^4 - 14x^2 + 45 = 0$$
$$\text{Substitution: } x^2 = y \quad \Longrightarrow$$
$$y^2 - 14y + 45 = 0$$
$$y^2 - 2 \cdot 7y + 7^2 = -45 + 49 = 4$$
$$y = 7 \pm 2$$
$$y_1 = x_1^2 = 9 \quad \Longrightarrow \quad x_{11} = 3, \quad x_{12} = -3$$
$$y_2 = x_2^2 = 5 \quad \Longrightarrow \quad x_{21} = \sqrt{5}, \quad x_{22} = -\sqrt{5}$$
$$L = \left\{-3, 3, -\sqrt{5}, \sqrt{5}\right\}$$

Wurzelgleichungen

L_1 sei die Lösungsmenge der Gleichung

$$f(x) = g(x) \qquad (1)$$

und L_2 sei die Lösungsmenge der quadrierten Gleichung

$$f(x)^2 = g(x)^2 \quad (2)$$

Es gilt $L_1 \subsetneqq L_2$, d.h. jede Lösung von (1) ist auch Lösung von (2), aber nicht unbedingt umgekehrt. Eine Wurzelgleichung enthält die Unbekannte im Radikanden einer Wurzel. Zum Beseitigen der Wurzeln muss die Gleichung nach geeigneten Umstellungen quadriert werden. Die quadrierte Gleichung kann Lösungen enthalten, die keine Lösungen der ursprünglichen Gleichung sind. Diese „falschen“ Lösungen können durchaus in der Definitionsmenge der ursprünglichen Gleichung liegen. Zur Bestimmung der Lösungsmenge muss mit den gefundenen Lösungen der quadrierten Gleichung also unbedingt die Probe gemacht werden!

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{x}} &= \sqrt{x} - 1, \quad D = [1, \infty[\\
1 &= x - \sqrt{x}\\
\sqrt{x} &= x - 1 \quad |^2\\
x &= x^2 - 2x + 1\\
x^2 - 3x &= -1\\
x^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 &= -1 + \frac{9}{4} = \frac{5}{4}\\
x_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, &\quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

Wegen $\sqrt{5} > 2$ ist $x_2 < 1$, d.h. $x_2 \notin D$.

Probe für x_1:

$$\begin{aligned}
\sqrt{x_1} &= \sqrt{\frac{6 + 2\sqrt{5}}{4}} = \frac{\sqrt{1 + 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2}}{2} =\\
&= \frac{\sqrt{\left(1 + \sqrt{5}\right)^2}}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\\
\text{LS} &= \frac{1}{\sqrt{x_1}} = \frac{2}{1 + \sqrt{5}} =\\
&= \frac{2(1 - \sqrt{5})}{1 - 5} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}\\
\text{RS} &= \sqrt{x_1} - 1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}
\end{aligned}$$

$$L = \left\{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right\}$$

$$\begin{aligned}
x - 1 = 3 \quad &\Longrightarrow \quad L_1 = \{4\}\\
(x - 1)^2 = 3^2 \quad &\Longrightarrow \quad L_2 = \{4; -2\}, \quad L_1 \subsetneqq L_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2 - 1} &= x - 2, \quad D =]-\infty, -1] \cup [1, \infty[\\
x^2 - 1 &= x^2 - 4x + 4\\
x &= \frac{5}{4} \in D\\
\text{Probe: LS} &= \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 - 1} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}\\
\text{RS} &= \frac{5}{4} - 2 = -\frac{3}{4} \neq \text{RS} \quad \Longrightarrow\\
L &= \{\}
\end{aligned}$$

Die Gleichung $\sqrt{x^2 - 1} = 2 - x$ führt auf dieselbe quadrierte Gleichung und somit auch auf $x = \frac{5}{4}$. Hier passt die Probe und es ist $L = \left\{\frac{5}{4}\right\}$.

$$\begin{aligned}
\sqrt{x + 2} &= x + 1, \quad D = [-1, \infty[\\
x + 2 &= x^2 + 2x + 1\\
x^2 + x &= 1\\
x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 &= 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}\\
x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, &\quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

Wegen $\sqrt{5} > 1$ ist $x_2 < -1$, d.h. $x_2 \notin D$.

Probe für x_1:

$$\begin{aligned}
\text{LS} &= \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} + 2} = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} =\\
&= \sqrt{\frac{6 + 2\sqrt{5}}{4}} = \frac{\sqrt{1 + 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2}}{2} =\\
&= \frac{\sqrt{\left(1 + \sqrt{5}\right)^2}}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\\
\text{RS} &= \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

$$L = \left\{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right\}$$

Definitionen und Regeln

Die quadratische Funktion

Die Normalparabel

Eine Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{mit} \quad a \neq 0$$

heißt *quadratische* Funktion. Der Graf einer quadratischen Funktion heißt *Parabel*.
Die einfachste quadratische Funktion hat die Gleichung

$$f(x) = x^2$$

Ihr Graf ist die *Normalparabel*. Der Punkt S(0|0) heißt *Scheitel* der Normalparabel.
Ist G_f der Graf der Funktion f, dann erhält man den Grafen der Funktion g mit der Gleichung

$$g(x) = f(x + d) + e$$

durch Verschiebung von G_f um den Vektor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -d \\ e \end{pmatrix},$$

d.h. um d nach links und um e nach oben.

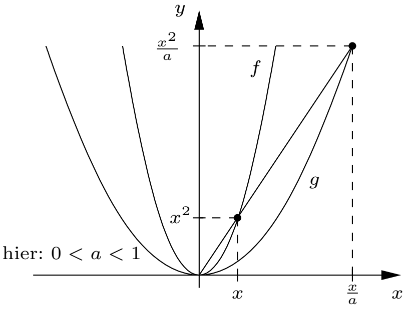
Der Graf der quadratischen Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = (x + d)^2 + e$$

ist die um den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -d \\ e \end{pmatrix}$ verschobene Normalparabel. Ihr Scheitel ist S($-d|e$).

Der Graf der Funktion g mit der Gleichung $g(x) = ax^2$ geht aus der Normalparabel durch eine zentrische Streckung mit dem Zentrum O(0|0) und dem Faktor $k = \frac{1}{a}$ hervor.

Beweis: $f(x) = x^2, \quad g(x) = ax^2$



$$g\left(\frac{1}{a} \cdot x\right) = a \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^2 = \frac{x^2}{a} = \frac{1}{a} \cdot f(x)$$

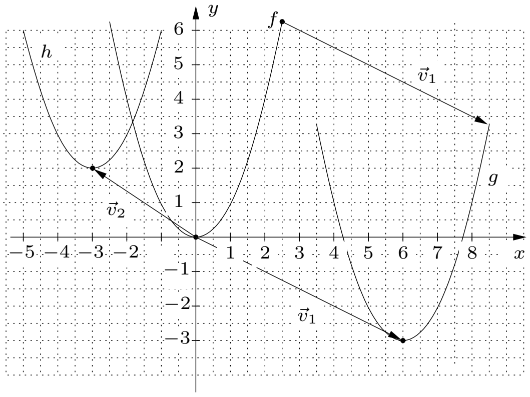
Beispiele

Die Normalparabel f und die um $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ verschobene Normalparabel mit der Gleichung

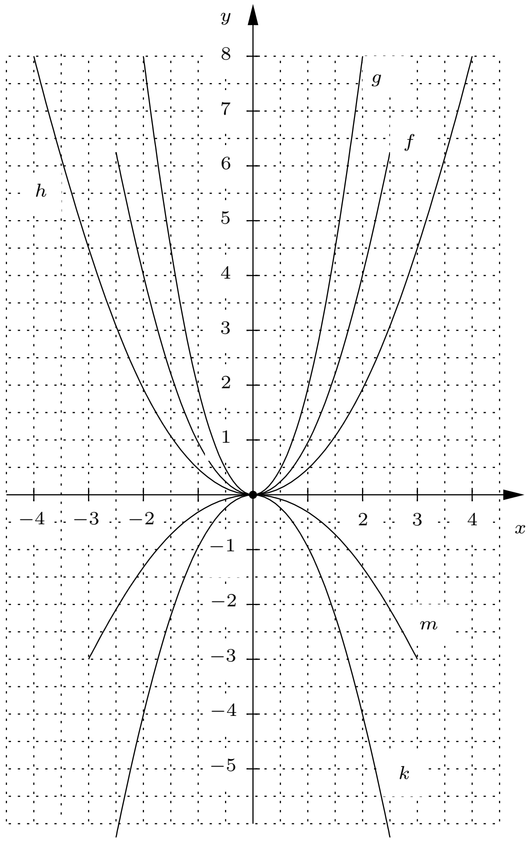
$$g(x) = (x - 6)^2 - 3$$

und die um $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ verschobene Normalparabel mit der Gleichung

$$h(x) = (x + 3)^2 + 2$$



Die Grafen der Funktionen $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x^2$, $h(x) = \frac{1}{2}x^2$, $k(x) = -x^2$ und $m(x) = -\frac{1}{3}x^2$:



Definitionen und Regeln

Die allgemeine quadratische Funktion

Umformen der Gleichung der quadratischen Funktion (quadratische Ergänzung):

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c = \\ &= a\left[x^2 + 2\cdot\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c = \\ &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c = \\ &= \underbrace{a\cdot\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}}_{\text{Scheitelform}} \end{aligned}$$

Der Graf der Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

ist eine Parabel mit dem Scheitel bei

$$\mathrm{S}\left(-\frac{b}{2a}\,\middle|\, c-\frac{b^2}{4a}\right)$$

Für $a > 0$ ist die Parabel nach oben, für $a < 0$ nach unten geöffnet.

Die Nullstellen von f sind

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{b}{2a} - \frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac} \\ x_2 &= -\frac{b}{2a} + \frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac} \end{aligned}$$

Wegen

$$a(x_1 + x_2) = -b$$

und

$$ax_1x_2 = c$$

folgt

$$\begin{aligned} a(x-x_1)(x-x_2) &= ax^2 - a(x_1+x_2)x + ax_1x_2 = \\ &= ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

Für die quadratische Funktion f mit

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

lautet die Scheitelform

$$f(x) = a\cdot\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

und die Produktform

$$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$$

mit den Nullstelen x_1 und x_2 von f.

Beispiele

Beispiel:

$$f(x) = \frac{2}{5}x^2 + 4x + \frac{32}{5}$$

Scheitelform:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2}{5}\left[x^2 + 10x + 16\right] = \\ &= \frac{2}{5}\left[x^2 + 2\cdot 5x + 5^2 - 25 + 16\right] = \\ &= \frac{2}{5}\left[(x+5)^2 - 9\right] = \\ &= \frac{2}{5}(x+5)^2 - \frac{18}{5} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{S}\left(-5\,\middle|\,-\frac{18}{5}\right) = \mathrm{S}(-5\,|\,-3{,}6)$$

Nullstellenberechnung mit der Scheitelform:

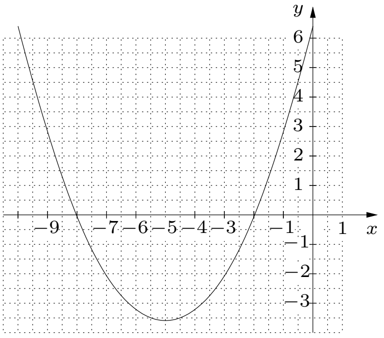
$$\frac{2}{5}(x+5)^2 - \frac{18}{5} = 0$$

$$(x+5)^2 = 9 \quad\Longrightarrow\quad x = -5 \pm 3$$

$$x_1 = -8, \qquad x_2 = -2$$

Produktform (faktorisierte Darstellung):

$$f(x) = \frac{2}{5}(x+8)(x+2)$$



Beispiel aus der Physik:

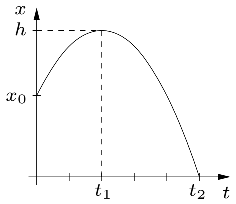
Ein Körper, der zur Zeit $t_0 = 0$ in der Höhe x_0 mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 senkrecht nach oben geworfen wird, befindet sich zur Zeit t in der Höhe

$$x(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0t + x_0$$

Maximale Höhe

$$h = \frac{v_0^2}{2g} + x_0$$

zur Zeit $t_1 = \dfrac{v_0}{g}$.



$$x(t_2) = 0 \quad\text{mit}\quad t_2 = \frac{v_0}{g} + \frac{1}{g}\sqrt{v_0^2 + 2gx_0}$$

Definitionen und Regeln

Parabel durch gegebene Punkte

Durch zwei Punkte $P_1(x_1|y_1)$ und $P_2(x_2|y_2)$ mit $x_1 \neq x_2$ kann man genau eine verschobene Normalparabel zeichnen. Gleichung der verschobenen Normalparabel:

$$f(x) = (x-d)^2 + e$$

$$P_1 \in G_f \iff (x_1|y_1) \in f \iff f(x_1) = y_1$$

$$\begin{aligned} P_1 \in G_f \implies &\quad f(x_1) = (x_1-d)^2 + e = y_1 \quad (1)\\ P_2 \in G_f \implies &\quad f(x_2) = (x_2-d)^2 + e = y_2 \quad (2) \end{aligned}$$

Auflösen des Gleichungssystems liefert die Unbekannten d und e.

Durch drei Punkte $P_1(x_1|y_1)$, $P_2(x_2|y_2)$ und $P_3(x_3|y_3)$, die nicht auf einer Geraden liegen und mit drei verschiedenen x-Koordinaten, kann man genau eine Parabel zeichnen.
Gleichung der Parabel:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x-d)^2 + e$$

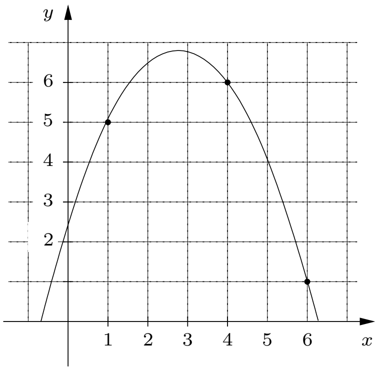
$$\begin{aligned} P_1 \in G_f \implies &\quad ax_1^2 + bx_1 + c = y_1 \quad (1)\\ P_2 \in G_f \implies &\quad ax_2^2 + bx_2 + c = y_2 \quad (2)\\ P_3 \in G_f \implies &\quad ax_3^2 + bx_3 + c = y_3 \quad (3) \end{aligned}$$

Auflösen des Gleichungssystems liefert die Unbekannten a, b und c.

Oder:

$$\begin{aligned} P_1 \in G_f \implies &\quad a(x_1-d)^2 + e = y_1 \quad (1)\\ P_2 \in G_f \implies &\quad a(x_2-d)^2 + e = y_2 \quad (2)\\ P_3 \in G_f \implies &\quad a(x_3-d)^2 + e = y_3 \quad (3) \end{aligned}$$

Auflösen des Gleichungssystems liefert die Unbekannten a, d und e.

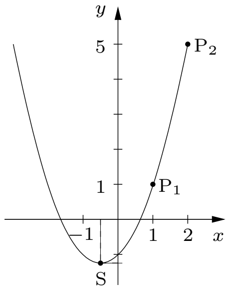


Beispiele

Gesucht ist eine verschobene Normalparabel durch die Punkte $P_1(1|1)$ und $P_2(2|5)$.

$$\begin{aligned} (1-d)^2 + e &= 1 \quad (1)\\ (2-d)^2 + e &= 5 \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 - 2d + d^2 + e &= 1 \quad (3)\\ 4 - 4d + d^2 + e &= 5 \quad (4) \end{aligned}$$



(4) − (3):

$$3 - 2d = 4$$

$$d = -\frac{1}{2}$$

$$(1) \implies e = 1 - \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 = -\frac{5}{4}$$

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$$

Gesucht ist eine Parabel durch die Punkte $P_1(1|5)$, $P_2(4|6)$ und $P_2(6|1)$.
Gleichung der Parabel:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{aligned} P_1 \in G_f \implies &\quad a + b + c = 5 \quad (1)\\ P_2 \in G_f \implies &\quad 16a + 4b + c = 6 \quad (2)\\ P_3 \in G_f \implies &\quad 36a + 6b + c = 1 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) - (1): &\quad 15a + 3b = 1 \quad (4)\\ (3) - (2): &\quad 20a + 2b = -5 \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \cdot (-2): &\quad -30a - 6b = -2 \quad (6)\\ (5) \cdot 3: &\quad 60a + 6b = -15 \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) + (5): &\quad 30a = -17 \quad (8)\\ &\quad a = -\frac{17}{30} \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (9) \text{ in } (5): &\quad b = -\frac{5}{2} + \frac{17}{3} = \frac{19}{6} \quad (10)\\ (1) \implies &\quad c = 5 + \frac{17}{30} - \frac{19}{6} = \frac{12}{5} \quad (11) \end{aligned}$$

Damit lautet die Parabelgleichung:

$$f(x) = -\frac{17}{30}x^2 + \frac{19}{6}x + \frac{12}{5}$$

mit dem Scheitel

$$S\left(\frac{95}{34}\middle|\frac{13921}{2040}\right) \approx S(2{,}79\,|\,6{,}82)$$

Wahrscheinlichkeit

Definitionen und Regeln

Produkte von Wahrscheinlichkeiten (1. Pfadregel)

Wir betrachten zwei Zufallsexperimente mit den Ergebnisräumen $\Omega_1 = \{\omega_{11}, \omega_{12}, ..., \omega_{1n}\}$ und $\Omega_2 = \{\omega_{21}, \omega_{22}, ..., \omega_{2m}\}$ und den Mächtigkeiten $|\Omega_1| = n$ und $|\Omega_2| = m$. Werden beide Experimente hintereinander ausgeführt, entsteht ein zweistufiges Zufallsexperiment (siehe S. 51) mit dem Ergebnisraum

$$\Omega = \{\omega_{11}\omega_{21}, \omega_{11}\omega_{21}, ..., \omega_{1n}\omega_{2m}\}$$

und der Mächtigkeit $|\Omega| = n \cdot m$. Wird das zusammengesetzte Experiment N-mal ausgeführt, erwartet man für Häufigkeit des Ergebnisses ω_{1x} beim ersten Experiment

$$H_{1x} = P(\omega_{1x}) \cdot N.$$

Für die Häufigkeit des Ergebnisses $\omega_{1x}\omega_{2y}$ im zusammengesetzten Experiment erwartet man dann

$$H_{1x,2y} = P(\omega_{2y}) \cdot H_{1x} = P(\omega_{1x})P(\omega_{2y})N.$$

Die Wahrscheinlichkeit für das eintreten von $\omega_{1x}\omega_{2y}$ im zusammengesetzten Experiment ist also

$$P(\omega_{1x}\omega_{2y}) = \frac{H_{1x,2y}}{N} = P(\omega_{1x})P(\omega_{2y})$$

$$\boxed{P(\omega_{1x}\omega_{2y}) = P(\omega_{1x})P(\omega_{2y})}$$

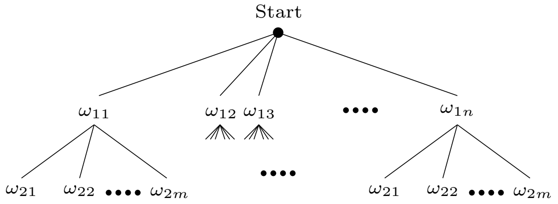
Die angestellten Überlegungen lassen sich leicht auf mehr als zweistufuge Zufallsexperimente verallgemeinern:

> In einem s-stufigen Zufallsexperiment ist die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses das Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs des entsprechenden Pfades im Baumdiagramm (*1. Pfadregel*):
>
> $$P(\omega_{1x}\omega_{2y}...\omega_{sz}) = P(\omega_{1x})P(\omega_{2y})...P(\omega_{sz})$$

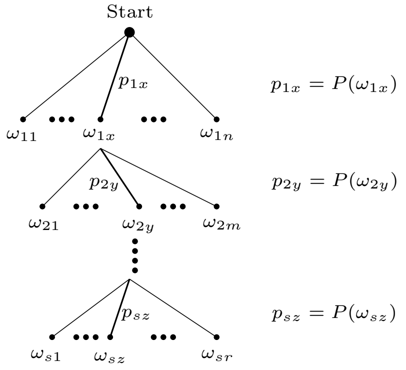
Eine *Urne* ist ein Behältnis für Kugeln, die nach Farbe, aufgedruckten Zahlen oder Ähnlichem unterschieden werden.
Beim Ziehen *mit* Zurücklegen ist der Urneninhalt und damit die Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes Ergebnis bei jedem Zug gleich.
Beim Ziehen *ohne* Zurücklegen ändert sich der Urneninhalt und damit die Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes Ergebnis bei jedem Zug.

Beispiele

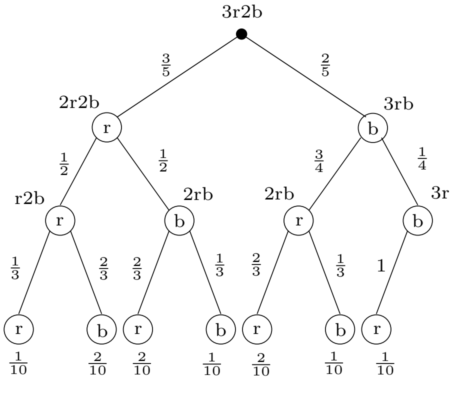
Baumdiagramm eines zweistufigen Experiments:



Baumdiagramm eines s-stufigen Experiments:



Beispiel: Eine Urne enthält drei rote und zwei blaue Kugel. Es werden *ohne* Zurücklegen 3 Kugeln gezogen.



$$P(\text{rrr}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{10}, \quad P(\text{rrb}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{10}$$

$$P(\text{rbr}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{10}, \quad P(\text{rbb}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{10}$$

$$P(\text{brr}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{10}, \quad P(\text{brb}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{10}$$

$$P(\text{bbr}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{10},$$

Wird *mit* Zurücklegen gezogen, gilt z.B.

$P(\text{rrr}) = \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}$, $P(\text{rbb}) = \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{12}{125}$

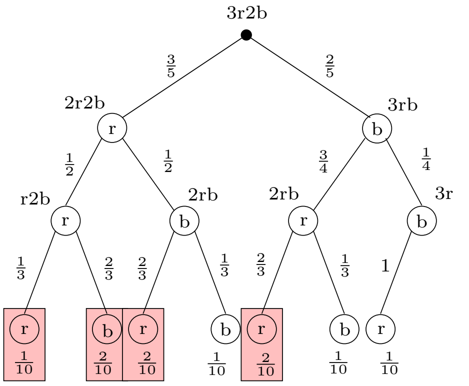
Definitionen und Regeln | **Beispiele**

Summen von Wahrscheinlichkeiten (2. Pfadregel)

Nach dem Zerlegungssatz (siehe S. 54) ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten seiner Elementarereignisse (siehe S. 55). Angewandt auf ein mehrstufiges Zufallsexperiment folgt:

> In einem mehrstufigen Zufallsexperiment ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Pfade, die zu diesem Ereignis führen (*2. Pfadregel*).

Beispiel: Eine Urne enthält drei rote und zwei blaue Kugel. Es werden *ohne* Zurücklegen 3 Kugeln gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mindestens zwei rote Kugeln zu ziehen?



$E =$ „mindestens 2 rote“ $= \{\text{rrr}, \text{rrb}, \text{rbr}, \text{brr}\}$

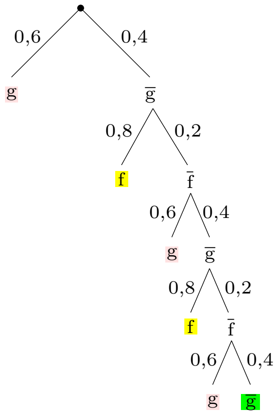
$$P(E) = P(\text{rrr}) + P(\text{rrb}) + P(\text{rbr}) + P(\text{brr}) =$$
$$= \frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{2}{10} + \frac{2}{10} = \frac{7}{10} = 70\%$$

Beispielaufgabe:

Der Girgl und der Fex sind leidenschaftliche Wilderer. Der Girgl trifft eine Gams mit der Wahrscheinlichkeit 60 %, der Fex mit 80 %. Die beiden Freunde gehen gemeinsam auf die Jagd, der Girgl hat drei, der Fex zwei Patronen dabei. Als sie einen Gamsbock sehen, beginnen sie abwechselnd auf ihn zu schießen, der Girgl beginnt. Nach einem Treffer ist die Gams tot und das Schießen beendet.

1. Erstelle ein Baumdiagramm für das Zufallsexperiment „Gamsschießen“. Verwende die Symbole g, f, $\overline{g}$ und $\overline{f}$ für das Treffen bzw. Nichttreffen des jeweiligen Schützen und schreibe den kompletten Ergebnisraum Ω hin. Gib auch die Mächtigkeit von Ω an. Mit welcher Wahrscheinlichkeit p_0 überlebt die Gams?
2. Schreibe das Ereignis F: „Die Gams wird vom Fex erlegt.“ in der Mengenschreibweise hin und berechne seine Wahrscheinlichkeit. Mit welcher Wahrscheinlichkeit p_g wird die Gams dann vom Girgl geschossen?

Lösung:



1.

$$\Omega = \{g, \overline{g}f, \overline{g}\overline{f}g, \overline{g}\overline{f}\overline{g}f, \overline{g}\overline{f}\overline{g}\overline{f}g, \overline{g}\overline{f}\overline{g}\overline{f}\overline{g}\}$$

$|\Omega| = 6$

$$p_0 = P(\overline{g}\overline{f}\overline{g}\overline{f}\overline{g}) = = 0{,}4^3 \cdot 0{,}2^2 = = 0{,}00256 = = 0{,}256\,\%$$

2. $F =$ „Die Gams wird vom Fex erlegt.“
$G =$ „Die Gams wird vom Girgl erlegt.“
$N =$ „Die Gams wird nicht erlegt.“

$$F = \{\overline{g}f, \overline{g}\overline{f}\overline{g}f\}$$

$$P(F) = 0{,}4 \cdot 0{,}8 + 0{,}4 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}8 =$$
$$= 0{,}32 \cdot (1 + 0{,}08) = 34{,}56\,\%$$

$\{F, G, N\}$ ist eine Zerlegung von $\Omega \quad \Longrightarrow$

$$p_\text{g} = P(G) = 1 - P(F) - P(N) =$$
$$= 1 - P(F) - p_0 =$$
$$= 1 - 0{,}3456 - 0{,}00256 = 65{,}184\,\%$$

Geometrie

Definitionen und Regeln

Der Satz des Pythagoras

Herleitung

Im rechtwinkligen Dreieck △ABC mit $\gamma = 90°$ ist D der Fußpunkt der Höhe von C auf AB. Die den rechten Winkel bildenden Seiten ([AC] und [BC]) heißen *Katheten*, die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite ist die *Hypotenuse*.
Aus der Ähnlichkeit

$$\triangle \mathrm{ABC} \sim \triangle \mathrm{ACD} \sim \triangle \mathrm{CBD}$$

folgt

$$\begin{aligned}
\frac{h}{p} &= \frac{q}{h} &&\Longrightarrow \quad \boxed{h^2 = pq} \quad &&\text{(Höhensatz)}\\
\frac{q}{a} &= \frac{a}{c} &&\Longrightarrow \quad \boxed{a^2 = qc} \quad &&\text{(Kathetensatz)}\\
\frac{p}{b} &= \frac{b}{c} &&\Longrightarrow \quad \boxed{b^2 = pc} \quad &&\text{(Kathetensatz)}
\end{aligned}$$

Aus den Kathetensätzen folgt

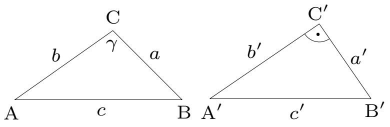
$$a^2 + b^2 = qc + pc = \underbrace{(q+p)}_{c}\, c = c^2$$

> In einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c gilt (Pythagoras):
>
> $$a^2 + b^2 = c^2$$

Umkehrung des Satzes von Pythagoras:

> Gilt im Dreieck △ABC die Beziehung $a^2+b^2 = c^2$, dann ist das Dreieck rechtwinklig ($\gamma = 90°$).

Beweis:

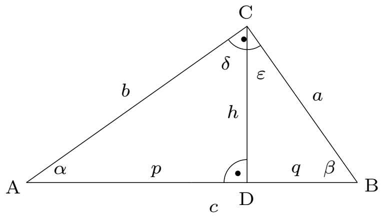


Wir betrachten zusätzlich das Dreieck △A′B′C′ mit $a' = a$, $b' = b$ und $\gamma' = 90°$. Nach dem Satz des Pythagoras gilt

$$c'^2 = a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2 = c^2 \Longrightarrow c' = c$$

Damit gilt △ABC ≅ △A′B′C′ (sss) und damit auch $\gamma = \gamma' = 90°$. q.e.d.

Beispiele



$$\left.\begin{aligned} \alpha + \beta &= 90° \\ \alpha + \delta &= 90° \\ \beta + \varepsilon &= 90° \end{aligned}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \delta = \beta,\ \varepsilon = \alpha$$

Struktur eines mathematischen Satzes

Eine *Aussage* ist ein sprachliches Gebilde, dem man einen Wahrheitswert (*wahr* oder *falsch*) zuordnen kann. „Die Sonne scheint.“ ist eine Aussage, „Scheint die Sonne?“ ist keine Aussage.
Das Gegenteil oder die *Negation* einer Aussage A bezeichnet man mit ¬A (nicht A oder non A).
A = „Die Sonne scheint.“
¬A = „Die Sonne scheint nicht.“
B = „$x = 3$“, ¬B = „$x \neq 3$“
Ein mathematischer Satz verknüpft zwei Aussagen A und B:

$$\mathrm{A} \Longrightarrow \mathrm{B}$$

Wenn A, dann B.

Wenn A wahr ist, dann ist auch B wahr.

A ist die *Voraussetzung*, B die *Behauptung*. Vertauscht man Voraussetzung und Behauptung, dann erhält man die *Umkehrung* des Satzes.

$$\underbrace{\mathrm{A} \Longrightarrow \mathrm{B}}_{\text{Satz}}, \qquad \underbrace{\mathrm{B} \Longrightarrow \mathrm{A}}_{\text{Umkehrung}}$$

Wenn ein Satz wahr ist, muss die Umkehrung nicht wahr sein.
Wenn der Satz und die Umkehrung wahr sind, schreibt man

$$\mathrm{A} \Longleftrightarrow \mathrm{B}$$

Allgemein gilt aber:

$$\boxed{(\mathrm{A} \Longrightarrow \mathrm{B}) \quad \Longleftrightarrow \quad (\neg\mathrm{B} \Longrightarrow \neg\mathrm{A})}$$

Man kann den Satz A ⟹ B also beweisen, indem man ¬B ⟹ ¬A beweist (*Widerspruchsbeweis*).

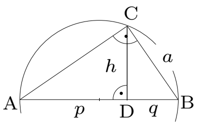
Definitionen und Regeln | **Beispiele**

Konstruktion einer Streckenlänge $\sqrt{x}$:

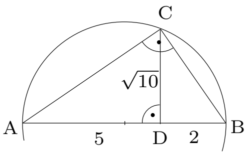
Mit Höhensatz: $pq = x = h^2$

Mit Kathetensatz: $cq = x = a^2$

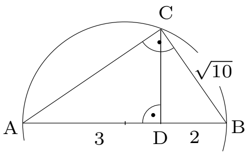
A, D, B zeichnen, C liegt auf dem Lot auf AB in D und auf dem Thaleskreis über [AB].



Konstruktion einer Strecke mit der Länge $\sqrt{10}$:



$h^2 = 5 \cdot 2 = 10$



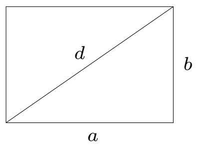
$a^2 = (3+2) \cdot 2 = 10$

Diagonale im Rechteck

$$d = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Im Quadrat mit $a = b$:

$$d = a\sqrt{2}$$



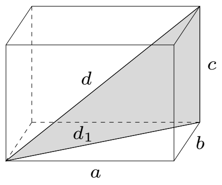
Diagonale im Quader

$$d_1^2 = a^2 + b^2$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Im Würfel mit $a = b = c$:

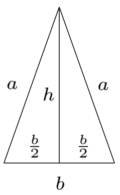
$$d = a\sqrt{3}$$



Höhe im gleichschenkligen Dreieck

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)$$

$$h = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$$

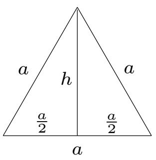


Höhe im gleichseitigen Dreieck

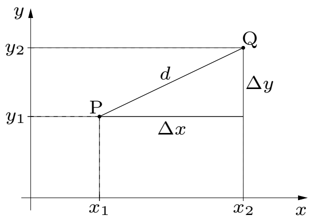
$$a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)$$

$$h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

Fläche: $A = \frac{1}{2}ah = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$



Die Entfernung zweier Punkte P$(x_1|y_1)$ und Q$(x_2|y_2)$ im Koordinatensystem:

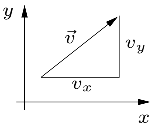


$$d = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

In 3D: P$(x_1|y_1|z_1)$, Q$(x_2|y_2|z_2)$:

$$d = \overline{\text{PQ}} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Der Betrag eines Vektors, z.B. der Geschwindigkeit $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$:



$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

oder in 3D: $v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

Beispiel: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \\ 4\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \end{pmatrix} \implies$

$$v = \sqrt{3^2\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} + 4^2\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = 5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ist $\triangle$ABC mit A$(1|2)$, B$(7|-2)$ und C$(3|5)$ rechtwinklig?

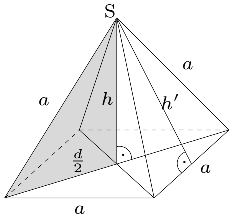
$$a^2 = \overline{\text{BC}}^2 = (7-3)^2 + (-2-5)^2 = 65$$

$$b^2 = \overline{\text{AC}}^2 = (3-1)^2 + (5-2)^2 = 13$$

$$c^2 = \overline{\text{AB}}^2 = (7-1)^2 + (-2-2)^2 = 52$$

$$\implies \quad b^2 + c^2 = a^2 \quad \implies \quad \alpha = 90°$$

Ein quadratische, gerade Pyramide (Grundfläche ist ein Quadrat mit der Kantenlänge a, die Spitze S befindet sich senkrecht über dem Mittelpunkt des Quadrats) hat die schräge Kante a.



Berechne die Höhe h und die Oberfläche A.

Diagonale des Quadrats: $d = a\sqrt{2}$

$$h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a}{2}\sqrt{2}$$

Die Seitenflächen sind gleichseitige Dreiecke mit der Höhe $h' = \frac{a}{2}\sqrt{3} \implies$

$$A = 4 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} + a^2 = a^2(1 + \sqrt{3})$$

Definitionen und Regeln

Trigonometrie

Definition der Winkelfunktionen

Zwei rechtwinklige Dreiecke, die in einem weiteren Winkel φ übereinstimmen, sind ähnlich. Es gilt also (siehe Abb.)

$$\frac{g_1}{h_1} = \frac{g_2}{h_2}, \quad \frac{a_1}{h_1} = \frac{a_2}{h_2}, \quad \frac{g_1}{a_1} = \frac{g_2}{a_2}$$

Diese nicht von der Größe des Dreiecks abhängigen Verhältnisse werden häufig gebraucht und erhalten eigene Namen:

$$\boxed{\begin{aligned} \sin\varphi &= \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{g}{h} \quad &&\text{(Sinus)} \\ \cos\varphi &= \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{h} \quad &&\text{(Kosinus)} \\ \tan\varphi &= \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{g}{a} \quad &&\text{(Tangens)} \end{aligned}}$$

$$\tan\varphi = \frac{g}{a} = \frac{\frac{g}{h}}{\frac{a}{h}} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$$

$$\boxed{\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}}$$

Da die Ankathete von φ gleich der Gegenkathete von $90^\circ - \varphi$ ist, gilt

$$\boxed{\cos\varphi = \sin(90^\circ - \varphi)}$$

Zur Schreibweise:

$$\sin^2\varphi = (\sin\varphi)^2$$

Mit dem Pythagoras folgt:

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = \frac{g^2}{h^2} + \frac{a^2}{h^2} = \frac{g^2 + a^2}{h^2} = \frac{h^2}{h^2} = 1$$

$$\boxed{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1}$$

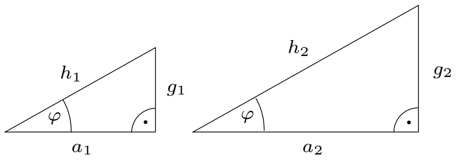
Ein paar exakte Werte:

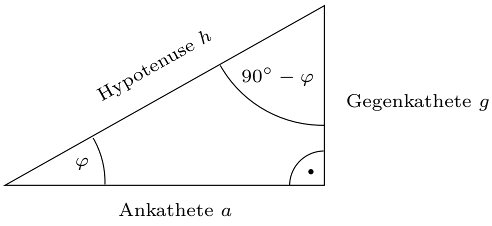
φ	0	30°	45°	60°	90°
$\sin\varphi$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos\varphi$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\varphi$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	–

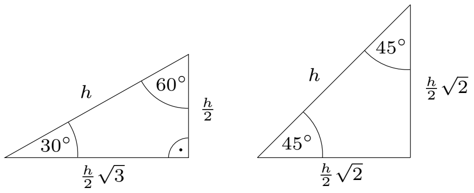
Zum einfachen Merken:

φ	0	30°	45°	60°	90°
$\sin\varphi$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$
$\cos\varphi$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$

Beispiele







$$\begin{aligned} 0 \leqq \varphi \leqq 90^\circ \quad &\Longrightarrow \quad 0 \leqq \sin\varphi \leqq 1 \\ 0 \leqq \cos\varphi \leqq 1, \quad &\quad\;\;\;\; 0 \leqq \tan\varphi \leqq +\infty \end{aligned}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{\frac{h}{2}}{h} = \frac{1}{2}, \quad \cos 30^\circ = \frac{\frac{h}{2}\sqrt{3}}{h} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\frac{h}{2}\sqrt{3}}{h} = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad \cos 60^\circ = \frac{\frac{h}{2}}{h} = \frac{1}{2}$$

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\frac{h}{2}\sqrt{2}}{h} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

Achtung! Den Taschenrechner mit $\boxed{\text{MODE}}$ auf $\boxed{\text{DEG}}$ (Gradmaß, Degree) einstellen!

$\sin 50^\circ = 0{,}7660, \quad \cos 50^\circ = 0{,}6428$

$\cos 40^\circ = \sin(90^\circ - 40^\circ) = \sin 50^\circ = 0{,}7660$

$\cos 50^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 50^\circ} = \sqrt{1 - 0{,}766^2} = 0{,}6428$

$\tan 89^\circ = 57{,}29$

Ist der Wert einer Winkelfunktion gegeben, findet man den Winkel mit den Tasten $\boxed{\sin^{-1}}$, $\boxed{\cos^{-1}}$ und $\boxed{\tan^{-1}}$, auf den meisten Rechnern erreichbar mit $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\sin}$ usw.

$\sin\alpha = 0{,}3 \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 17{,}4576^\circ = 17^\circ\, 27'\, 27''$

$\tan\varphi = 100 \quad \Longrightarrow \quad \varphi = 89{,}42706^\circ = 89^\circ\, 25'\, 37{,}4''$

Definitionen und Regeln

Die Steigung

Eine Gerade (z.B. eine Straße) steigt auf der waagrechten Länge Δx um die Höhe Δy, der Steigungswinkel φ ist der Winkel gegen die Waagrechte. Die *Steigung* m ist definiert durch

$$\boxed{m = \tan\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

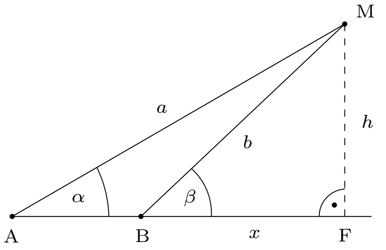
Die Steigung wird oft in Prozent angegeben.

Vorsicht: Die Steigung $m = 100\%$ entspricht *nicht* der Senkrechten!

$$100\% = 1 = \tan\varphi \quad\Longrightarrow\quad \varphi = 45^\circ$$

Ein Beispiel aus der Astronomie:

Von zwei Punkten A und B auf der Erde mit $\overline{\mathrm{AB}} = 3000{,}00\,\mathrm{km}$ wird ein Punkt M auf dem Mond anvisiert. Dabei werden die Winkel $\alpha = 60^\circ\,0'\,0''$ und $\beta = 60^\circ\,23'\,21''$ gemessen. Gesucht sind die Streckenlängen $a = \overline{\mathrm{AM}}$ und $b = \overline{\mathrm{BM}}$.



Der Fußpunkt des Lotes von M auf AB sei F, $h = \overline{\mathrm{FM}}$ und $x = \overline{\mathrm{BF}}$. Dann gilt

$$h = \left(\overline{\mathrm{AB}} + x\right)\tan\alpha = x\tan\beta$$

Mit $\beta = 60^\circ + \dfrac{23^\circ}{60} + \dfrac{21^\circ}{3600} = 60{,}38917^\circ$ folgt

$$x = \frac{\overline{\mathrm{AB}}\tan\alpha}{\tan\beta - \tan\alpha} = 1{,}890\cdot 10^5\,\mathrm{km}$$

und $\overline{\mathrm{AF}} = \overline{\mathrm{AB}} + x = 1{,}920\cdot 10^5\,\mathrm{km}$.

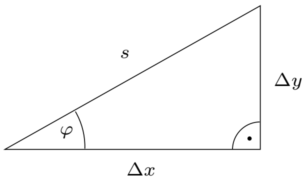
$$a = \frac{\overline{\mathrm{AF}}}{\cos\alpha} = 3{,}840\cdot 10^5\,\mathrm{km}$$
$$b = \frac{c}{\cos\beta} = 3{,}825\cdot 10^5\,\mathrm{km}$$

Der Taschenrechner berechnet $\sin\varphi$ mit

$$x = \frac{\varphi\cdot\pi}{180^\circ} \quad \text{und dann}$$

$$\sin\varphi = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

Beispiele

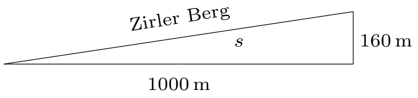


Der Zirler Berg hat die Steigung 16 %. Für den Steigungswinkel φ gilt

$$\tan\varphi = 16\% = 0{,}16 \quad\Longrightarrow\quad \varphi = 9{,}09^\circ$$

Auf die waagrechte Länge $\Delta x = 1\,\mathrm{km}$ steigt die Straße um

$$\Delta y = \Delta x\tan\varphi = 0{,}16\cdot 1000\,\mathrm{m} = 160\,\mathrm{m}$$



Für die Länge s der Straße auf 160 m Höhenunterschied gilt

$$\sin\varphi = \frac{\Delta y}{s} \quad\Longrightarrow\quad s = \frac{\Delta y}{\sin\varphi} = 1013\,\mathrm{m}$$

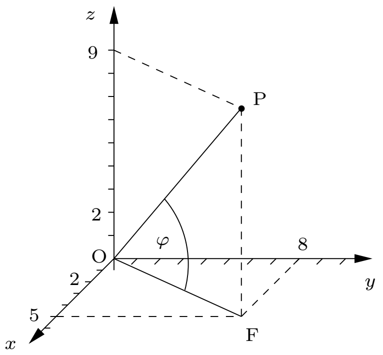
Oder:

$$\cos\varphi = \frac{\Delta x}{s} \quad\Longrightarrow\quad s = \frac{\Delta x}{\cos\varphi} = 1013\,\mathrm{m}$$

Oder:

$$s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = 1013\,\mathrm{m}$$

Gegeben ist der Punkt P (5|8|9). Wir suchen den Winkel φ, den die Gerade OP mit der xy-Ebene einschließt.



Der Fußpunkt des Lotes von P auf die xy-Ebene ist F (5|8|0), $\overline{\mathrm{OF}} = \sqrt{5^2 + 8^2} = \sqrt{89}$.

$$\tan\varphi = \frac{\overline{\mathrm{PF}}}{\overline{\mathrm{OF}}} = \frac{9}{\sqrt{89}} \quad\Longrightarrow\quad \varphi = 43{,}65^\circ$$

Definitionen und Regeln | **Beispiele**

Raumgeometrie

Schrägbilder

Dreidimensionales (räumliches) Koordinatensystem:

- Die drei Achsen stehen paarweise senkrecht aufeinander
- Orientierung der Achsen (rechte Hand):

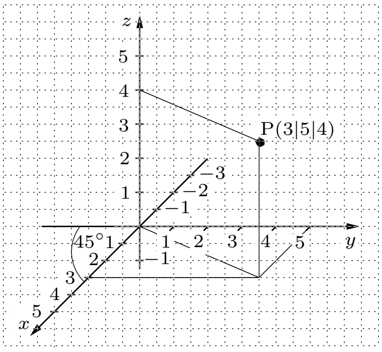
  x-Achse: Daumen, y-Achse: Zeigefinger, z-Achse: Mittelfinger
- Die x-Achse schließt mit der negativen y-Achse einen 45°-Winkel ein.
- Einheit auf der x-Achse: $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

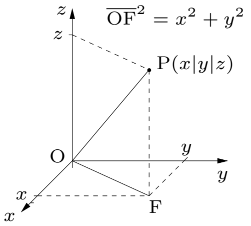
  (Diagonale eines Kästchens)

Der Punkt P $(x|y|z)$ hat vom Ursprung O $(0|0|0)$ (siehe S. 74) die Entfernung

$$\boxed{\overline{\text{OP}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Koordinatensystem für Schrägbilder:





Geraden und Ebenen

Siehe S. 26.

> Das Lot g von P $\notin E$ auf die Ebene E steht senkrecht auf jeder Geraden $h \subset E$ durch den Fußpunkt F.

$\overline{\text{PF}}$ ist die kürzeste Verbindung von P zur Ebene E und heißt *Abstand* von P zu E:

$$\boxed{d(\text{P}, E) = \overline{\text{PF}}}$$

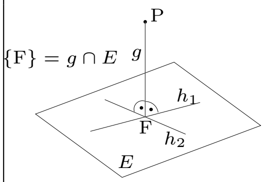
Den Winkel φ zwischen einer Geraden g und einer Ebene E findet man auf folgende Weise:

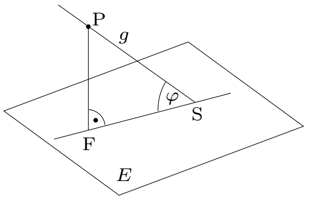
> P $\in g$ und P $\notin E$, F ist der Fußpunkt des Lotes von P auf E, S ist der Schnittpunkt von g mit E. Dann ist $\varphi = \sphericalangle$FSP.

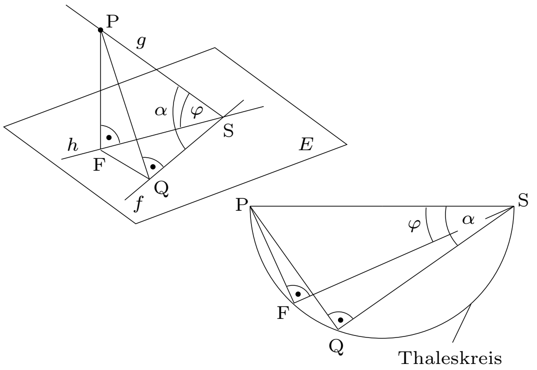
Der so definierte Winkel φ ist der kleinste Winkel, den g mit einer beliebigen Geraden $f \subset E$ durch S einschließen kann.

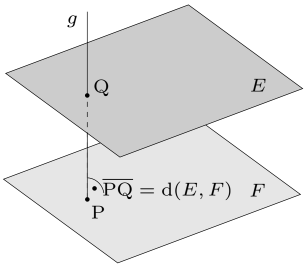
Beweis: Es sei $h =$ FS, $f \neq h$, Q der Fußpunkt des Lotes von P auf f und $\alpha = \sphericalangle$QSP. Wegen $\sphericalangle$QFP $= 90°$ ist $\overline{\text{PQ}} > \overline{\text{PF}}$. Zeichnet man $\triangle$FSP und $\triangle$QSP in einer Ebene, dann erkennt man, dass tatsächlich $\alpha > \varphi$ gilt.

Zwei Ebenen E und F, die keinen gemeinsamen Punkt besitzen, heißen *parallel*. Ist P $\in E$, g das Lot auf E in P und Q $= g \cap F$, dann ist $\overline{\text{PQ}}$ der *Abstand* von E und F: $\overline{\text{PQ}} = \text{d}(E, F)$.









Definitionen und Regeln

Beispiele

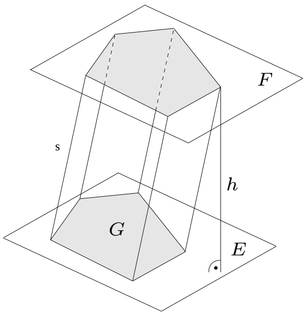
Geometrische Körper

Das Prisma

Grund- und Deckfläche eines *Prismas* sind parallelverschobene Vielecke (also kongruente, nicht verdrehte Vielecke in parallelen Ebenen E und F). Der Abstand h der Ebenen E und F ist die *Höhe* des Prismas. Ist G der Inhalt der Grund- bzw. Deckfläche, dann hat das Prisma das Volumen

$$\boxed{V = Gh}$$

Die Verbindungsstrecken entsprechender Punkte der Grund-und Deckfläche heißen *Seitenkanten* des Prismas. Alle Seitenkanten haben die gleiche Länge s.
Ein Prisma heißt *gerade*, wenn die Seitenkanten senkrecht auf der Grundfläche stehen. Im geraden Prisma gilt $h = s$.

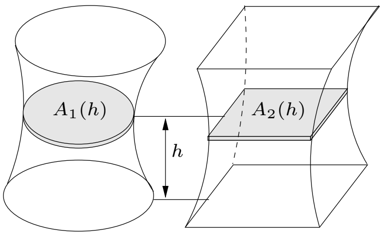


Alle Seitenflächen eines Prismas bilden seine *Mantelfläche*.
Ein Quader ist ein gerades, vierseitiges Prisma. Das in optischen Geräten verwendete Prisma ist ein gerades, dreiseitiges Prisma.

Das Prinzip von Cavalieri

Zwei Körper haben das gleiche Volumen, wenn sie in gleicher Höhe die gleiche Querschnittsfläche besitzen:

$$A_1(h) = A_2(h) \quad \text{für alle } h$$

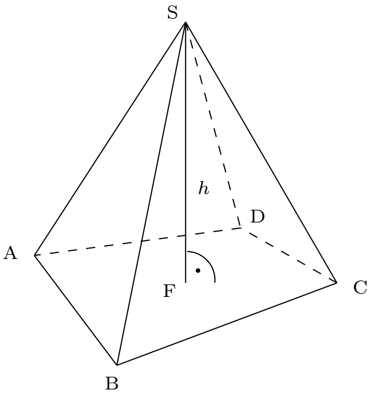


Die Pyramide

Rezept zum Bau einer Pyramide:

Man nehme ein Vieleck ABC... in einer Ebene E und einen Punkt S $\notin E$. Die vom Vieleck in der Ebene E eingeschlossene Fläche nennen wir die *Grundfläche* G der Pyramide, die Seiten des Vielecks heißen *Grundkanten* und S *Spitze*. Dann verbindet man S mit allen Ecken des Vielecks und erhält so die *Seitenkanten* der Pyramide. Die aus je einer Grundkante und den dazugehörenden Seitenkanten gebildeten Dreiecke schließen die *Seitenflächen* der Pyramide ein, alle Seitenflächen zusammen bilden die *Mantelfläche* A_M. Die *Oberfläche* der Pyramide ist $A_\mathrm{O} = A_\mathrm{M} + G$. Die Höhe h der Pyramide ist der Abstand der Spitze S von der Ebene E.

Eine Pyramide heißt *gerade*, wenn alle Seitenkanten die gleiche Länge s haben. In einer geraden Pyramide hat jede Ecke der Grundfläche vom Höhenfußpunkt F die gleiche Entfernung $\sqrt{s^2 - h^2}$, d.h. die Ecken der Grundfläche liegen auf einem Kreis um F (Umkreis).



Eine vierseitige Pyramide mit der Spitze S, den Grundkanten [AB], [BC], [CD] und [DA], den Seitenkanten [AS], [BS], [CS] und [DS] und der Höhe $h = \overline{\mathrm{SF}}$.

Die ägyptischen Pyramiden sind quadratische gerade Pyramiden (die Grundfläche ist ein Quadrat).

Definitionen und Regeln	**Beispiele**

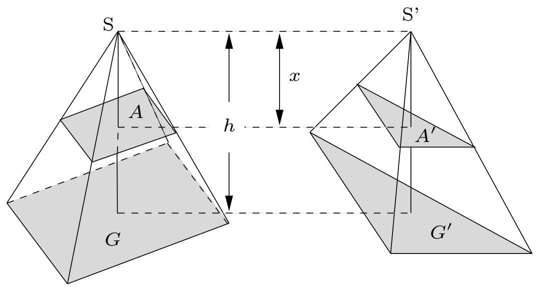
Wir betrachten zwei Pyramiden mit gleich goßen Grundflächen ($G = G'$) und gleicher Höhe h, deren Grundflächen in einer Ebene liegen. Aus einer zur Grundebene parallelen Ebene E schneiden die Pyramiden die Flächen A und A' aus. Damit haben die Spitzen S und S' von E den gleichen Abstand x und es folgt aus dem Strahlensatz

$$\frac{A}{G} = \frac{x^2}{h^2} = \frac{A'}{G'} = \frac{A'}{G} \quad \Longrightarrow \quad A = A'$$

Aus dem Prinzip von Cavalieri folgt:

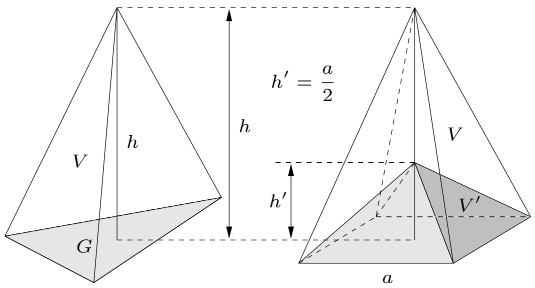
> Zwei Pyramiden mit gleicher Höhe und gleicher Grundfläche haben das gleiche Volumen.

Beispiel zu nebenstehendem Satz:
Zerlegung einer Pyramide mit Grundfläche G, Volumen $3V$ und Höhe $3h$ in drei Pyramiden mit Grundfläche G, Volumen V und Höhe h:



> Für zwei Pyramiden mit gleicher Grundfläche G und den Höhen h bzw. h' gilt:
> $$\frac{V}{V'} = \frac{h}{h'}$$

Jetzt können wir das Volumen V einer beliebigen Pyramide mit der Grundfläche G und der Höhe h berechnen. Man betrachtet eine zweite Pyramide (gerade und quadratisch) mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe, d.h. $a^2 = G$:

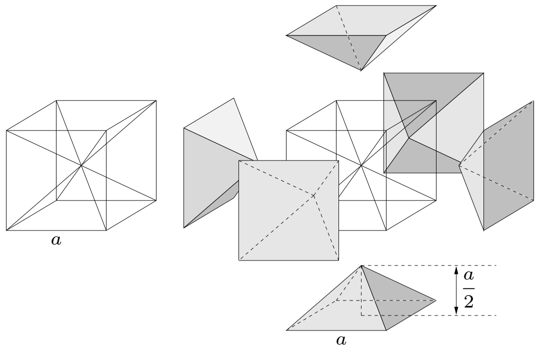


Aus der Abbildung und den schon bewiesenen Sätzen (siehe auch rechts) folgt:

$$V = \frac{h}{h'}V' = \frac{h}{\frac{a}{2}} \cdot \frac{a^3}{6} = \frac{1}{3}a^2h = \frac{1}{3}Gh$$

> Eine Pyramide mit der Grundfläche G und der Höhen h hat das Volumen
> $$V = \frac{1}{3}Gh$$

Zerlegung eines Würfels der Kantenlänge a durch seine Raumdiagonalen in sechs kongruente Pyramiden der Grundfläche a^2:



Eine quadratische gerade Pyramide mit der Grundfläche a^2 und der Höhe $\frac{a}{2}$ hat das Volumen

$$V' = \frac{a^3}{6}$$

Die Cheopspyramide hat die Grundkantenlänge $a = 230\,\mathrm{m}$ und die Höhe $h = 146\,\mathrm{m}$. Ihr Volumen ist also

$$V = \frac{1}{3} \cdot (230\,\mathrm{m})^2 \cdot 146\,\mathrm{m} = 2{,}57 \cdot 10^6\,\mathrm{m}^3$$

Definitionen und Regeln

Der Zylinder

Ein *Zylinder* ist ein „gerades Prisma“ mit einem Kreis (Radius r) als Grund- und Deckfläche und der Höhe h.
Die *Abwicklung* eines Körpers erhält man, wenn man seine Oberfläche, falls möglich, in einer Ebene ausbreitet. Die zwischen Grund- und Deckfläche liegende *Mantelfläche* eines Zylinders kann man einfach in eine Ebene abrollen und erhält damit ein Rechteck mit den Seiten h und $2r\pi$. Der Inhalt der Mantelfläche ist also

$$A_\mathrm{M} = 2r\pi h$$

und die Oberfläche ist

$$A_\mathrm{O} = 2r\pi h + 2r^2\pi = 2r\pi(h + r)$$

Das Volumen des Zylinders ist (Grundfläche mal Höhe)

$$V = r^2\pi h$$

Der Kegel

Ein *Kegel* (genauer ein *gerader Kreiskegel*) ist eine „gerade Pyramide“ mit einem Kreis (Radius r) als Grundfläche und der Höhe h. Eine *Seitenkante* des Kegels ist die Strecke von der Spitze S zu einem Punkt auf dem Grundkreis. Für die Länge s der Seitenkante gilt

$$s = \sqrt{r^2 + h^2}$$

Das Volumen des Kegels ist

$$V = \frac{1}{3}r^2\pi h$$

Die Abwicklung der Mantelfläche des Kegels ist ein Kreissektor mit dem Radius s und der Bogenlänge $b = 2r\pi$. Der Inhalt der Mantelfläche ist also

$$A_\mathrm{M} = \frac{b}{2\pi s} \cdot s^2\pi = rs\pi$$

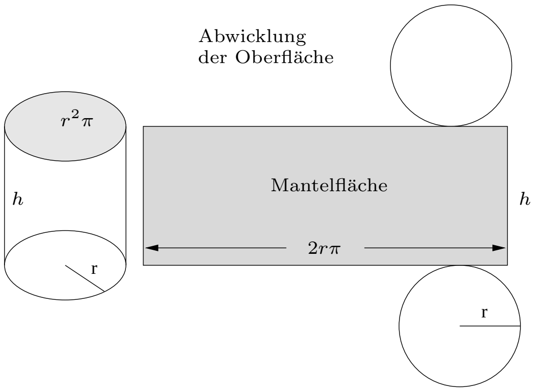
und die Oberfläche ist

$$A_\mathrm{O} = rs\pi + r^2\pi = r\pi(s + r)$$

Für den Öffnungswinkel φ der abgewickelten Mantelfläche gilt

$$\varphi = \frac{r}{s} \cdot 360° = \frac{2r\pi}{s}$$

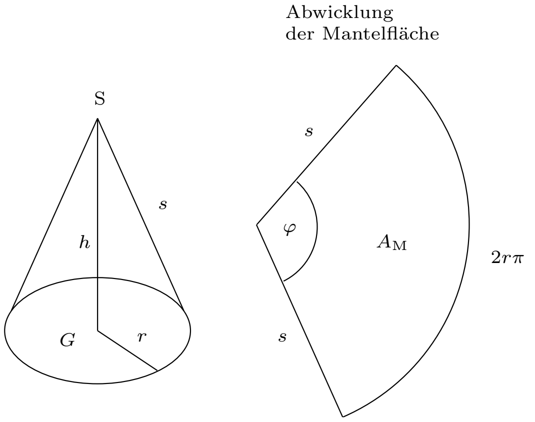
Beispiele



Beispiel: Welchen Radius und welche Höhe hat eine Getränkedose mit $V = 0{,}33\,\mathrm{cm}^3$ und $h = 3r$?

$$V = r^2\pi h = 3r^3\pi \quad\Longrightarrow\quad r = \sqrt[3]{\frac{V}{3\pi}} = 3{,}27\,\mathrm{cm}$$

$$h = 3r = 9{,}81\,\mathrm{cm}$$



Beispiel: Aus einem halbkreisförmigen Blatt Papier mit Radius s wird die Mantelfläche eines Kegels gebogen.

$$\varphi = \frac{r}{s} \cdot 360° = 180° \quad\Longrightarrow\quad r = \frac{s}{2}$$

Die Mantelfläche ist

$$A_\mathrm{M} = \frac{s^2\pi}{2},$$

die Oberfläche

$$A_\mathrm{O} = \frac{s^2\pi}{2} + r^2\pi = \frac{3s^2\pi}{4}$$

Das Volumen des Kegels ist

$$V = \frac{1}{3}r^2\pi h = \frac{s^2\pi}{12}\sqrt{s^2 - \frac{s^2}{4}} = \frac{s^3\pi}{24}\sqrt{3}$$

Grundwissen Mathematik – Jahrgangsstufe 10

Geometrie

Definitionen und Regeln | **Beispiele**

Kreisfläche und Umfang

π-Berechnung (Streifenmethode)

Der Einheitskreis (Radius $r = 1$) hat die Fläche π. Es wird näherungsweise die Fläche des viertelten Einheitskreises berechnet und mit 4 multipliziert. Dazu zerlegt man den Viertelkreis in n Streifen der Breite $\Delta x = \frac{1}{n}$. Die Höhe der Streifen ist der Funktionswert in der Mitte des jeweiligen Intervalls:

$$x_1 = \frac{1}{2n},\ x_2 = \frac{3}{2n},\ ...\ x_n = \frac{2n-1}{2n}$$

Die Fläche des Streifens mit der Nummer k ist dann

$$A_k = \Delta x \cdot f(x_k) = \frac{1}{n}\sqrt{1 - x_k^2}$$

Den mit dieser Methode berechneten Näherungswert für π nennen wir p_n:

$$p_n = \frac{4}{n}\left[f(x_1) + f(x_2) + \ ...\ + f(x_n)\right] = \\ = \frac{4}{n}\left[\sqrt{1 - x_1^2} + \ ...\ + \sqrt{1 - x_n^2}\right]$$

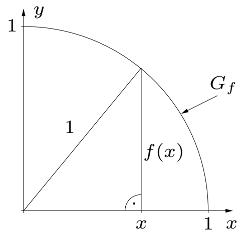
p_n ist um so genauer, je größer n gewählt wird:

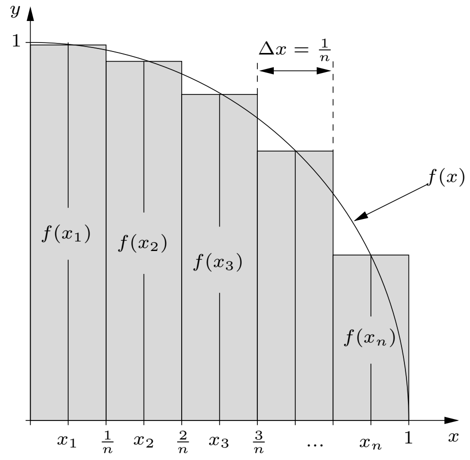
n	p_n	δ_{rel}	Rechenzeit in s
5	3,172	0,0097	0,005
10	3,1524	0,0034	0,010
100	3,14194	$1{,}1 \cdot 10^{-4}$	0,100
1000	3,14160	$3{,}5 \cdot 10^{-6}$	1,0
10000	3,1415930	$1{,}1 \cdot 10^{-7}$	10
100000	3,141592664	$3{,}5 \cdot 10^{-9}$	100

Die Funktionsgleichung der Kreislinie: Aus dem Pythagoras folgt

$$x^2 + f(x)^2 = 1^2$$

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$





$$p_5 = \frac{4}{5}\left[\sqrt{1 - 0{,}1^2} + \sqrt{1 - 0{,}3^2} + \sqrt{1 - 0{,}5^2} + \right. \\ \left. + \sqrt{1 - 0{,}7^2} + \sqrt{1 - 0{,}9^2}\right] = 3{,}172$$

Mit $\pi = 3{,}141592654...$ folgt für den relativen Fehler unseres Näherungswertes

$$\delta_{\text{rel}} = \frac{p_5 - \pi}{\pi} = 0{,}0097 = 0{,}97\%$$

Man braucht die 100-fache Rechenzeit, um das Ergebnis um drei Dezimalen zu verbessern ($\delta_{\text{rel}} = 10^{-s}$ entspricht s Dezimalen an Genauigkeit). Ist t_4 die Rechenzeit für 4 Dezimalen, dann ist die Rechenzeit für s Dezimalen

$$t_s = t_4 \cdot 10^{\frac{2(s-4)}{3}}$$

Die Rechenzeit steigt exponentiell mit der Stellenzahl!

Für 22 Dezimalen von π braucht man also

$$t_{22} = t_4 \cdot 10^{\frac{2 \cdot 18}{3}}\,\text{s} = 10^{11}\,\text{s} \approx 3 \cdot 10^3\,\text{a}.$$

Für die Berechnung einer größeren Stellenzahl von π ist die Streifenmethode also völlig ungeeignet.

Definitionen und Regeln

π-Berechnung nach Archimedes

Wir nähern den Umfang $U = 2\pi$ des Einheitskreises durch die Umfänge ein- und umbeschriebener regulärer n-Ecke an. Unser erstes Vieleck ($k = 1$) ist das Quadrat ($n = 4$). Dann verdoppeln wir bei jedem Schritt die Eckenzahl, d.h. $n = 2^{k+1}$. Die Seitenlänge des einbeschriebenen n-Ecks ist s_k, die des umbeschriebenen s'_k. Der Umfang des einbeschriebenen n-Ecks ist U_k, die des umbeschriebenen U'_k:

$$U_k = ns_k = 2^{k+1}s_k, \quad U'_k = ns'_k = 2^{k+1}s'_k$$

Aus dem Strahlensatz folgt

$$\frac{s'_k}{s_k} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{s_k^2}{4}}} \quad\Longrightarrow\quad s'_k = \frac{s_k}{\sqrt{1-\frac{s_k^2}{4}}}$$

$$\frac{U_k}{2} < \pi < \frac{U'_k}{2} \quad\Longrightarrow$$

$$\boxed{\underbrace{2^k s_k}_{p_k} < \pi < \underbrace{2^k s'_k}_{p'_k}}$$

Wir berechnen jetzt s_{k+1} aus s_k.

Mit $\quad x = 1 - \sqrt{1-\frac{s_k^2}{4}} \quad$ folgt

$$\begin{aligned} s_{k+1} &= \sqrt{\left(\frac{s_k}{2}\right)^2 + x^2} = \\ &= \sqrt{\frac{s_k^2}{4} + \left(1-\sqrt{1-\frac{s_k^2}{4}}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{s_k^2}{4} + 1 - 2\sqrt{1-\frac{s_k^2}{4}} + 1 - \frac{s_k^2}{4}} \end{aligned}$$

Rekursionsformel zur Berechnung von s_k:

$$\boxed{s_{k+1} = \sqrt{2-2\sqrt{1-\frac{s_k^2}{4}}}}$$

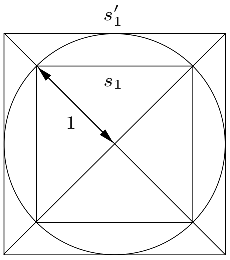
Beginnend mit dem Quadrat ($k = 1$) folgt

$$s_1 = \sqrt{2}, \quad s'_1 = 2 \quad\Longrightarrow\quad 2\sqrt{2} < \pi < 4$$

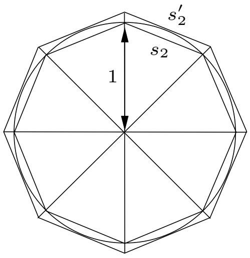
k	p_k	p'_k	δ_k
1	2,828	4,000	0,586
2	3,0615	3,31371	0,1261
10	3,1415914	3,1415951	$1{,}8 \cdot 10^{-6}$
20	3,141592653589	3,141592653592	$1{,}8 \cdot 10^{-12}$

k	$\pi_k = \frac{p_k+p'_k}{2}$	$\delta_{\text{echt}} = \pi - \pi_k$
1	3,414	0,087
20	3,14159265359038	$5{,}9 \cdot 10^{-13}$
30	3,14159265358979323902	$5{,}6 \cdot 10^{-19}$

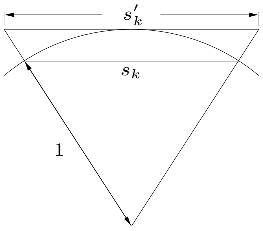
Beispiele

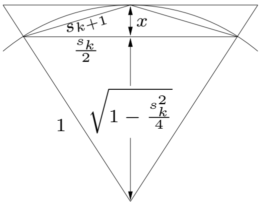


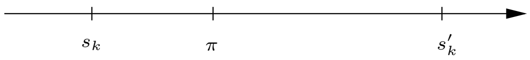
$k = 1$, $n = 2^{1+1} = 4$



$k = 2$, $n = 2^{2+1} = 8$







Nimmt man den Mittelwert

$$\pi_k = \frac{p_k + p'_k}{2}$$

als Näherungswert für π, dann ist der Fehler sicher kleiner als

$$\begin{aligned} \delta_k &= \frac{p'_k - p_k}{2} = 2^k\frac{s'_k - s_k}{2} = \\ &= 2^{k-1}s_k\frac{1-\sqrt{1-\frac{s_k^2}{4}}}{\sqrt{1-\frac{s_k^2}{4}}} \end{aligned}$$

Beachtet man $s_k \ll 1$ für größere k (für $k = 20$ ist $s_k \approx \frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{2^k} = \frac{\pi}{2^{20}} = 3 \cdot 10^{-6}$), dann folgt mit $\sqrt{1+h} \approx 1 + \frac{h}{2}$ (siehe S. 62)

$$\delta_k \approx 2^{k-1}\frac{\pi}{2^k}\frac{1-\left(1-\frac{s_k^2}{8}\right)}{\underbrace{1-\frac{s_k^2}{8}}_{\approx 1}} \approx \frac{\pi^3}{2^{2k+4}}$$

$$k = 20 \quad\Longrightarrow\quad \delta_{20} \approx 1{,}8 \cdot 10^{-12}$$

Mit 20 Schritten erhält man also eine Genauigkeit von 12 Stellen, d.h. ungefähr 0,6 Stellen Verbesserung pro Schritt. Ist t_1 die Rechenzeit für einen Schritt, dann braucht man für s Dezimalen Genauigkeit die Rechenzeit $t_s = \frac{t_1}{0{,}6} \cdot s$, die nur noch linear mit der Stellenzahl wächst. (Berücksichtigt man noch, dass die Rechenoperationen von Zahlen mit vielen Ziffern länger dauern, ist t_s proportional zu $s \lg s$.)

Definitionen und Regeln

Kreissektor, Bogenmaß

A_S ist die Fläche und b die Bogenlänge eines Kreissektors mit Radius r und Öffnungswinkel φ. A ist die Fläche des ganzen Kreises und $U = 2r\pi$ der Kreisumfang. Aus dem Verhältnis

$$\frac{A_\mathrm{S}}{A} = \frac{b}{U} = \frac{b}{2r\pi} = \frac{\varphi}{360^\circ}$$

folgt

$$A_\mathrm{S} = \frac{\varphi}{360^\circ} \cdot A \quad \text{und} \quad b = \frac{\varphi \cdot 2r\pi}{360^\circ} = \frac{\varphi r\pi}{180^\circ}$$

Da b proportional zu φ ist, kann b als Maß für den Winkel verwendet werden. Man definiert das *Bogenmaß* des Winkels φ als Bogenlänge eines Kreissektors mit Radius 1 und Öffnungswinkel φ:

$$\varphi = \frac{\varphi\pi}{180^\circ} \quad \Longrightarrow \quad 180^\circ = \pi$$

Zur Messung von Winkeln verwendet man das Gradmaß und das Bogenmaß. Zur Umrechnung muss man sich nur eine Formel merken:

$$180^\circ = \pi$$

$$\boxed{180^\circ = \pi, \qquad 1^\circ = \frac{\pi}{180}, \qquad 1 = \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{\pi}{180^\circ}}$$

Mit den neuen Formeln vereinfachen sich Ausdrücke für Bogenlänge und Fläche eines Kreissektors (Radius r):

$$\boxed{b = r\varphi}$$

$$A_\mathrm{S} = \frac{\varphi}{360^\circ} \cdot A = \frac{\varphi}{2\pi} \cdot r^2\pi = \frac{1}{2}r^2\varphi$$

$$\boxed{A_\mathrm{S} = \frac{1}{2}r^2\varphi = \frac{1}{2}br}$$

(Zum leichten Merken: Wie Dreiecksfläche mit Grundlinie b und Höhe r.)

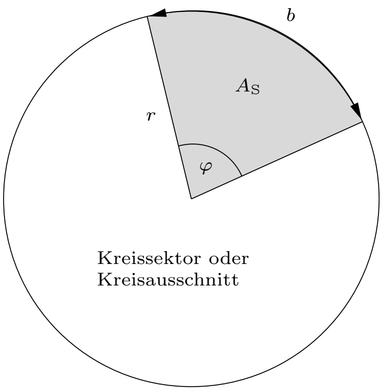
Kreissegment (Kreisabschnitt)

Länge der *Sehne*: $s = r \sin\frac{\varphi}{2}$

Höhe des Segments: $h = r - r\cos\frac{\varphi}{2}$

$$\begin{aligned} A_\mathrm{Seg} &= A_\mathrm{Sektor} - A_\mathrm{Dreieck} = \\ &= \frac{1}{2}r^2\varphi - \frac{1}{2}s(r-h) = \\ &= \frac{rb - s(r-h)}{2} \end{aligned}$$

Beispiele



Kreissektor oder Kreisausschnitt

$$30^\circ = 30 \cdot 1^\circ = 30 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{6}$$

$$1 = \frac{180^\circ}{\pi} = 57{,}296^\circ$$

$$\sin\frac{\pi}{6} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

φ	360°	270°	180°	90°	60°	45°	30°
φ	2π	$\frac{3\pi}{2}$	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

Achtung!
Es heißt wirklich $180^\circ = \pi$ und *nicht* $180^\circ \mathrel{\widehat{=}} \pi$.

Zwei Orte auf dem Äquator (West- und Ostküste von Afrika) haben die Längen $\lambda_1 = 9^\circ$ und $\lambda_2 = 43^\circ$. Mit dem Erdradius $R = 6380\,\mathrm{km}$ ist ihre Entfernung

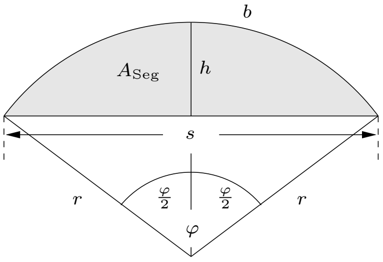
$$x = R(\lambda_2 - \lambda_1) = R \cdot 34^\circ = R \cdot \frac{34\pi}{180} = 3786\,\mathrm{km}$$

Die Rechnung

$$x = 6380\,\mathrm{km} \cdot 34^\circ = 216920\,\mathrm{km}^\circ$$

ist zwar auch richtig, nur muss die ungewohnte Längeneinheit km° noch umgerechnet werden:

$$x = 216920\,\mathrm{km}^\circ = 216920\,\mathrm{km} \cdot \frac{\pi}{180} = 3786\,\mathrm{km}$$



Kreissegment oder Kreisabschnitt

Definitionen und Regeln

Die Kugel

Definition der Kugel

Die Kugeloberfläche K ist die Menge aller Punkte P, die von einem festen Punkt M (dem Mittelpunkt) die gleiche Entfernung r (Radius) haben:

$$K = \{\, \mathrm{P} \,|\, \overline{\mathrm{MP}} = r \}$$

Ist M der Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems, dann folgt aus dem dreidimensionalen Pythagoras (siehe S. 77)

$$\boxed{\mathrm{P}\,(x|y|z) \in K \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2}$$

Das Kugelvolumen

Alle Punkte der Kugeloberfläche haben vom Mittelpunkt die gleiche Entfernung r (Radius). Um das Volumen V einer Kugel mit Radius r zu berechnen, betrachtet man als Vergleichskörper einen Zylinder mit Radius r und Höhe $h = 2r$, von dem oben und unten ein Kegel herausgefräst wurde (wie ein Vulkankrater). Eine Ebene parallel zur Grundfläche des Zylinders schneidet aus dem angebohrten Zylinder die Fläche A_1 (Kreisring) und aus der Kugel die Fläche A_2 (Kreis) aus. Wegen $x = y$ (45°-Winkel) gilt:

$$A_1 = r^2\pi - x^2\pi = (r^2 - y^2)\pi = R^2\pi = A_2$$

Aus dem Prinzip von Cavalieri (siehe S. 78) folgt dann, dass das Kugelvolumen V gleich dem Volumen des angebohrten Zylinders ist:

$$\begin{aligned} V &= V_{\text{Zylinder}} - 2V_{\text{Kegel}} = \\ &= r^2\pi \cdot 2r - 2 \cdot \frac{1}{3} r^2 \cdot r = \\ &= 2r^3\pi - \frac{2}{3} r^3\pi = \frac{4}{3} r^3\pi \end{aligned}$$

$$\boxed{V = \frac{4\pi}{3}\, r^3}$$

Welchen Radius hat eine Kugel mit dem Volumen $V = 1\,\mathrm{m}^3$?

$$\frac{4\pi}{3}\, r^3 = V \quad \Longrightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = 0{,}620\,\mathrm{m}$$

Beispiele

Beispiel:

Welcher Punkt A $(3|4|z)$ liegt auf der Kugel um den Ursprung mit Radius $r = 13$?

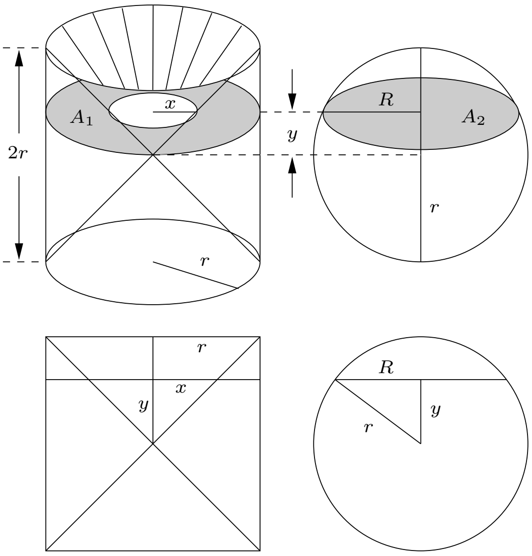
$$3^2 + 4^2 + z^2 = 13^2 \quad \Longrightarrow \quad z = \pm\sqrt{144} = \pm 12$$

$$\mathrm{A}\,(3|4|12) \quad \text{oder} \quad \mathrm{A}\,(3|4|-12)$$

Eine Ebene E schneidet eine Kugel K in einem Kreis k:

$$E \cap K = k$$

Liegt der Kugelmittelpunkt in E, nennt man k einen *Großkreis*. Größkreise haben den gleichen Radius wie die Kugel.



Beispiele:

Der Erdradius ist $R = 6380\,\mathrm{km}$, das Volumen der Erde also

$$V_{\text{Erd}} = \frac{4\pi}{3}\, R^3 = 1{,}09 \cdot 10^{12}\,\mathrm{km}^3$$

Welche Kantenlänge a hat ein Würfel mit dem gleichen Volumen wie eine Kugel mit Radius r?

$$a^3 = \frac{4\pi}{3}\, r^3 \quad \Longrightarrow \quad a = \sqrt[3]{\frac{4\pi}{3}}\, r = 1{,}612\, r$$

Definitionen und Regeln

Die Kugeloberfläche

Zur Berechnung der Kugeloberfläche stellen wir uns einen kugelförmigen Wüstenplaneten vor. Ein Geländefahrzeug (Sandbuggy) mit der Spurbreite x (Abstand der Räder auf einer Achse) umrundet den Nordpol auf einem Breitenkreis. Wegen (siehe nebenstehende Abbildung) $\varphi' = 90° - \varepsilon = \varphi$ folgt (ähnliche Dreiecke)

$$\frac{z}{r} = \frac{\Delta y}{x} \quad \Longrightarrow \quad z = \frac{r\Delta y}{x}$$

Die von den Reifenspuren eingeschlossene Fläche ΔA ist in sehr guter Näherung (die „Wölbung“ der Fläche kann wegen $x \ll r$ praktisch vernachlässigt werden)

$$\Delta A \approx 2z\pi \cdot x = 2 \cdot \frac{r\Delta y}{x}\pi x = 2r\pi\Delta y \qquad (1)$$

ΔA ist *nicht* von der Spurbreite x, sondern nur von der Dicke Δy in Richtung der Kugelachse abhängig! Die Mantelfläche einer Kugelschicht der Dicke h setzen wir aus n dünnen Scheiben der Dicke Δy zusammen ($n\Delta y = h$). Verwendet man immer dünnere und dafür immer mehr Scheiben, wird aus dem $\approx$-Zeichen in (1) das Gleichheitszeichen:

$$A_h = n \cdot \Delta A = \underbrace{n\Delta y}_{h} 2r\pi = 2r\pi h$$

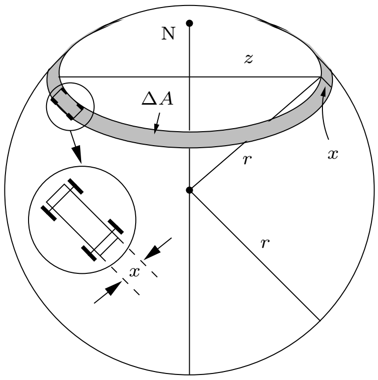
Die Mantelfläche einer Kugelschicht der Dicke h mit dem Kugelradius r ist

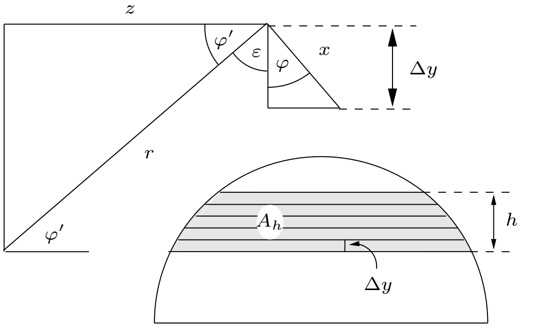
$$A_h = 2r\pi h$$

Für $h = 2r$ erhält man die gesamte Oberfläche der Kugel

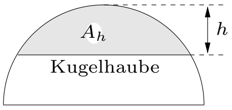
$$\boxed{A = 4\pi r^2}$$

Beispiele





Ein Spezialfall der Kugelschicht ist die *Kugelhaube* oder das *Kugelsegment*. Für den zur Kugelhaube gehörenden Teil der Kugeloberfläche gilt dann auch



$$A = 2r\pi h$$

Definitionen und Regeln | **Beispiele**

Trigonometrie

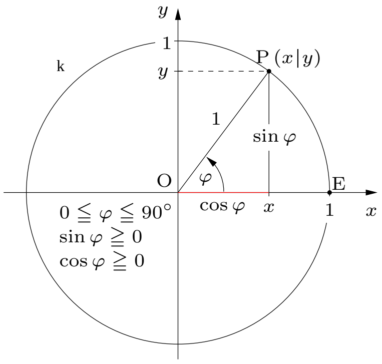
Winkelfunktionen für beliebige Winkel

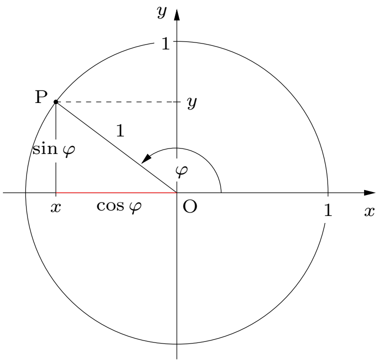
k ist der Einheitskreis ($r = 1$) mit dem Koordinatenursprung O als Mittelpunkt, E (1|0) markiert die Einheit auf der x-Achse. P $(x|y)$ ist ein beliebiger Punkt auf der Kreislinie ($P \in k$). $\varphi = \sphericalangle$EOP ist der Winkel zwischen dem Strahl [OP und der x-Achse, im Gegenuhrzeigersinn positiv gezählt.
Definition:

$$\boxed{\mathrm{P}\,(x|y) \in k \quad \Longrightarrow \quad \sin\varphi = y, \quad \cos\varphi = x}$$

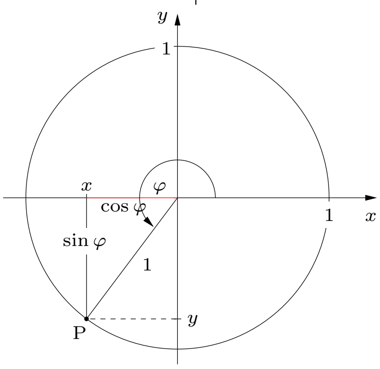
Für $\cos\varphi \neq 0$ definiert man:

$$\boxed{\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}}$$

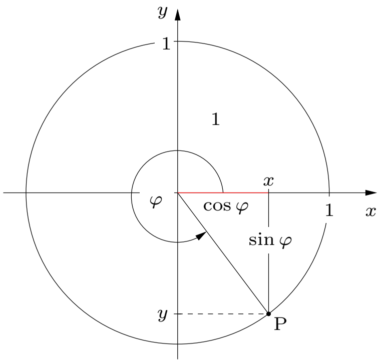




$90° < \varphi \leqq 180°$
$\sin\varphi \geqq 0$
$\cos\varphi < 0$



$180° < \varphi \leqq 270°$
$\sin\varphi < 0$
$\cos\varphi \leqq 0$



$270° < \varphi \leqq 360°$
$\sin\varphi < 0$
$\cos\varphi > 0$

φ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°
φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$
$\sin\varphi$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\cos\varphi$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\tan\varphi$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$

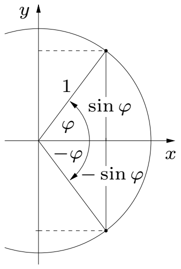
φ	270°	300°	315°	330°	360°	4500°	540°	630°	720°	−30°	−60°
φ	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{3}$
$\sin\varphi$	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	-1	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\cos\varphi$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	0	-1	0	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\varphi$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	–	0	–	0	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$

$$\boxed{-1 \leqq \sin\varphi \leqq 1} \quad \boxed{-1 \leqq \cos\varphi \leqq 1}$$

$$\boxed{-\infty \leqq \tan\varphi \leqq +\infty}$$

$$\boxed{\sin(-\varphi) = -\sin\varphi}$$

$$\boxed{\cos(-\varphi) = \cos\varphi}$$



Definitionen und Regeln

Für $k \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\boxed{\sin(\varphi + k \cdot 360^\circ) = \sin(\varphi + 2k\pi) = \sin\varphi}$$

$$\boxed{\cos(\varphi + k \cdot 360^\circ) = \cos(\varphi + 2k\pi) = \cos\varphi}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned}\sin 1000^\circ &= \sin(1000^\circ - 2 \cdot 360^\circ) = \sin 280^\circ = \\ &= -\sin(360^\circ - 280^\circ) = -\sin 80^\circ\end{aligned}$$

$1000 : 2\pi = 159{,}155 \quad \Longrightarrow$

$$\begin{aligned}\sin 1000 &= \sin(1000 - 159 \cdot 2\pi) = \sin 0{,}9735 = \\ &= \sin 0{,}3099\,\pi\end{aligned}$$

$\sin x$ und $\cos x$ sind *periodische* Funktionen mit der Periodenlänge $2\pi = 360^\circ$.
Der Graf von $\cos x$ ist der um $\frac{\pi}{2}$ nach links verschobene Graf von $\sin x \quad \Longrightarrow$

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Die allgemeine Sinusfunktion

$$\begin{aligned}f(x) &= A\sin(kx + \varphi) + c = \\ &= A\sin\left[k\left(x + \frac{\varphi}{k}\right)\right] + c\end{aligned}$$

A heißt *Amplitude*, φ ist die *Phase*.

f ist periodisch mit der Periodenlänge

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{k}}$$

d.h. $f(x + n\lambda) = f(x)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Ansatzpunkt:

$$\mathrm{P}\,(a|c) \quad \text{mit} \quad a = -\frac{\varphi}{k}$$

$$f(x) = c \quad \text{für} \quad x = a + n \cdot \frac{\lambda}{2},\ n \in \mathbb{Z}.$$

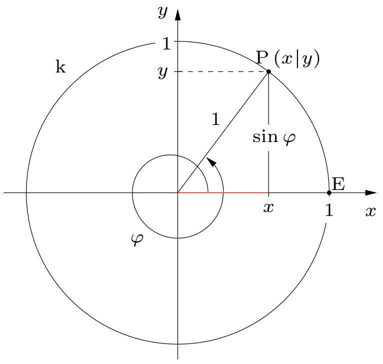
Maxima:

$$f(x) = c + A \quad \text{für} \quad x = a + \frac{\lambda}{4} + n\lambda,\ n \in \mathbb{Z}$$

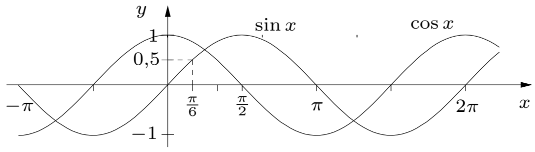
Minima:

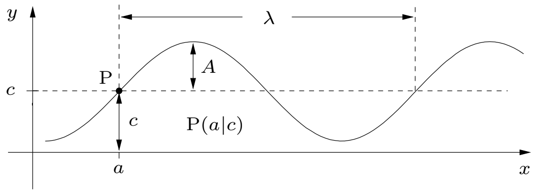
$$f(x) = c - A \quad \text{für} \quad x = a - \frac{\lambda}{4} + n\lambda,\ n \in \mathbb{Z}$$

Beispiele



$$\sin\varphi = \sin(\varphi - 360^\circ)$$





Beispiel: $\quad f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$

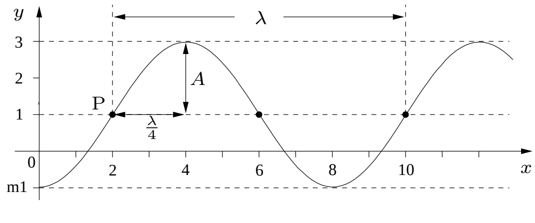
Die Amplitude ist 2.

Mit $k = \frac{\pi}{4}$ folgt $\lambda = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8$.

Mit der Phase $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ und $c = 1$ folgt für den Ansatzpunkt $\mathrm{P}(a|c)$ mit

$$a = -\frac{-\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{4}} = 2,$$

also P(2|1).



Wahrscheinlichkeit

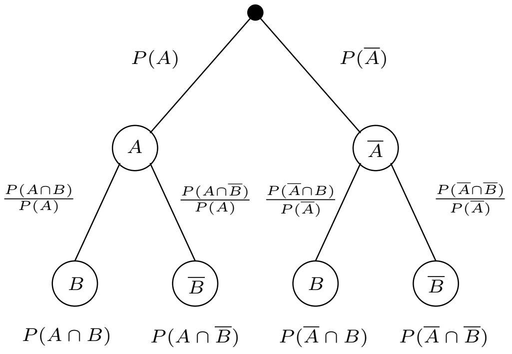
Definitionen und Regeln

Vierfeldertafel und Baumdiagramm

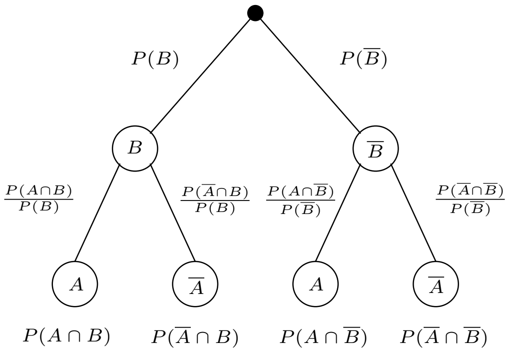
Eine Menge Ω wird nach zwei Kriterien in je zwei Teilmengen A und $\overline{A}$ bzw. B und $\overline{B}$ zerlegt. Wählt man aus Ω zufällig ein Element aus, ist Ω der Ergebnisraum eines Zufallsexperiments und die Teilmengen A, $\overline{A}$, B, $\overline{B}$ sind Ereignisse dieses Experiments. Die absoluten bzw. relativen Häufigkeiten (Wahrscheinlichkeiten) der Ereignisse kann man in einer Vierfeldertafel darstellen (siehe S. 54).

Ω	A	$\overline{A}$	
B	$P(A \cap B)$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(B)$
$\overline{B}$	$P(A \cap \overline{B})$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	$P(\overline{B})$
	$P(A)$	$P(\overline{A})$	1

Darstellung als Baumdiagramm:

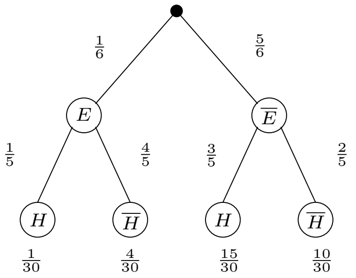


Vertauscht man A und B im Baumdiagramm, dann erhält man das *inverse* oder *umgekehrte* Baumdiagramm:



Beispiele

Beispiel: In einem Gebirgsdorf mit insgesamt 3000 Einwohnern leben fünf mal so viele Gäste ($\overline{E}$) wie Einheimische (E). 60% der Gäste tragen einen Trachtenhut, dagegen nur 20% der Einheimischen. H ist die Menge der Hutträger.



Ω	E	$\overline{E}$	
H	$\frac{1}{30}$	$\frac{15}{30}$	$\frac{16}{30}$
$\overline{H}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{10}{30}$	$\frac{14}{30}$
	$\frac{5}{30}$	$\frac{25}{30}$	1

Vierfeldertafel mit absoluten Häufigkeiten:

Ω	E	$\overline{E}$	
H	100	1500	1600
$\overline{H}$	400	1000	1400
	500	2500	3000

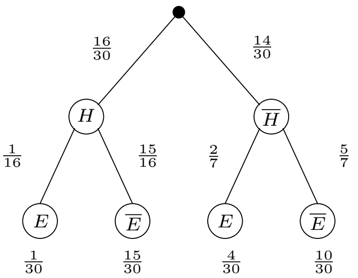
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig getroffener Hutträger ein Einheimischer ist?

$$P_H(E) = \frac{|E \cap H|}{|H|} = \frac{100}{1600} = \frac{1}{16}$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig getroffener Nichthutträger ein Einheimischer ist?

$$P_{\overline{H}}(E) = \frac{|E \cap \overline{H}|}{|\overline{H}|} = \frac{400}{1400} = \frac{2}{7}$$

Das inverse (umgekehrte) Baumdiagramm:



Definitionen und Regeln

Die bedingte Wahrscheinlichkeit

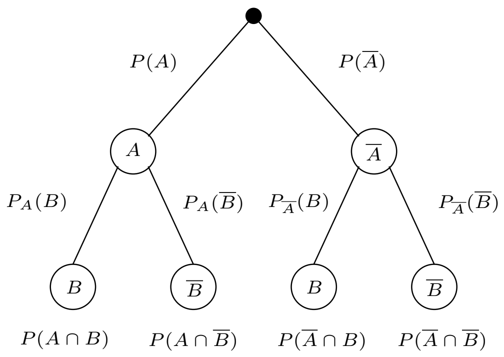
Eine Menge Ω wird nach zwei Kriterien in je zwei Teilmengen A und $\overline{A}$ bzw. B und $\overline{B}$ zerlegt. Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von B unter der Voraussetzung, dass A schon eingetreten ist, heißt *bedingte* Wahrscheinlichkeit von B unter der Bedingung A:

$$P_A(B) = \frac{|A \cap B|}{|A|} = \frac{\frac{|A\cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|A|}{|\Omega|}} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P_{\overline{A}}(B) = \frac{|\overline{A} \cap B|}{|\overline{A}|} = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(\overline{A})}$$

$$P_A(\overline{B}) = \frac{|A \cap \overline{B}|}{|A|} = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(A)}$$

$$P_{\overline{A}}(\overline{B}) = \frac{|\overline{A} \cap \overline{B}|}{|\overline{A}|} = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{A})}$$



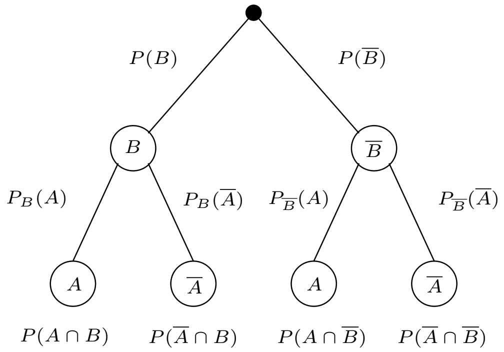
Analog:

$$P_B(A) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P_{\overline{B}}(A) = \frac{|\overline{B} \cap A|}{|\overline{B}|} = \frac{P(\overline{B} \cap A)}{P(\overline{B})}$$

$$P_B(\overline{A}) = \frac{|B \cap \overline{A}|}{|B|} = \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(B)}$$

$$P_{\overline{B}}(\overline{A}) = \frac{|\overline{A} \cap \overline{B}|}{|\overline{B}|} = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})}$$



Beispiele

Absolute Wahrscheinlichkeiten sind bedingte Wahrscheinlichkeiten mit der Bedingung Ω:

$$P(A) = P_\Omega(A), \quad P(B) = P_\Omega(B)$$

> Im Baumdiagramm ist die Summe der (bedingten) Wahrscheinlichkeiten aller Zweige, die von einem Verzweigungspunkt ausgehen, gleich eins.
> (*3. Pfadregel*)

z.B.: $P_A(B) + P_A(\overline{B}) = 1$

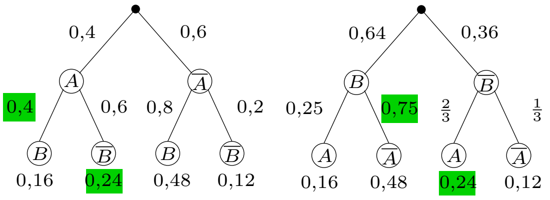
Strategie zum Lösen von Aufgaben:

- Baumdiagramm, inverses Baumdiagramm und Vierfeldertafel zeichnen
- Gegebene Wahrscheinlichkeiten eintragen
- Mit Hilfe der drei Pfadregeln die restlichen Wahrscheinlichkeiten eintragen
- Zur besseren Veranschaulichung und Überprüfung die Vierfeldertafel der absoluten Häufigkeiten erstellen

---

Beispiel:

$P(A \cap \overline{B}) = 0{,}24,\ P_A(B) = 0{,}4,\ P_B(\overline{A}) = 0{,}75$



$$P_A(\overline{B}) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$$

$$P(A) = \frac{0{,}24}{0{,}6} = 0{,}4$$

$$P(\overline{A}) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$$

$$P(A \cap B) = 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}16$$

0,16 und 0,24 ins inverse Diagramm übertragen

$$P_B(A) = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$$

$$P(B) = \frac{0{,}16}{0{,}25} = 0{,}64$$

$$P(\overline{B}) = 1 - 0{,}64 = 0{,}36$$

$$P_{\overline{B}}(A) = \frac{0{,}24}{0{,}36} = \frac{2}{3}$$

$$P_{\overline{B}}(\overline{A}) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$P(\overline{A} \cap B) = 0{,}64 \cdot 0{,}75 = 0{,}48$$

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}36 \cdot \frac{1}{3} = 0{,}12$$

0,48 und 0,12 ins andere Diagramm übertragen

$$P_{\overline{A}}(\overline{B}) = \frac{0{,}12}{0{,}6} = 0{,}2$$

$$P_{\overline{A}}(B) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$$

Algebra

Definitionen und Regeln

Exponentialfunktion

Lineares Wachstum

Eine Größe a wächst in gleichen Zeiten Δt immer um den gleichen Betrag Δa. Mit $a(0) = a_0$ und $a(n \cdot \Delta t) = a_n$ folgt

$$a_n = a_0 + n \cdot \Delta a$$

Die Menge aller Zahlenpaare $(n|a_n)$ bilden die Funktion

$$f_\mathrm{a}: \quad n \to a_n = f_\mathrm{a}(n) = a_0 + n \cdot \Delta a$$

mit der Definitionsmenge $\mathbb{N}_0$. f_a heißt *arithmetische Folge* (jede Funktion mit $D = \mathbb{N}$ oder $D = \mathbb{N}_0$ heißt *Folge*).
Man kann a auch als Funktion der Zeiten

$$t_n = n\Delta t$$

betrachten:

$$a: \quad t_n \to a_n = a(t_\mathrm{n}) = a_0 + \frac{\Delta a}{\Delta t} \cdot t_n$$

Der Graf G_a von a besteht aus den Punkten $(t_n|a_n)$. G_a ist eine Teilmenge des Grafen (der Geraden) von

$$g: \quad t \to g(t) = a_0 + \frac{\Delta a}{\Delta t} \cdot t, \quad t \in \mathbb{R}$$

Rekursive Definition der arithmetischen Folge:

$$a_{k+1} = a_k + \Delta a \quad \text{oder} \quad a_{k+1} - a_k = \Delta a$$

Die Differenz zweier aufeinanderfolgender Zahlen einer arithmetischen Folge ist konstant.

Nach Gauss ist die Summe der n ersten natürlichen Zahlen

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Die *arithmetische Reihe* ist die Summe der ersten $n+1$ Zahlen einer arithmetischen Folge:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n =$$
$$= a_0 + (a_0 + \Delta a) + \dots + (a_0 + n\Delta a) =$$
$$= (n+1)a_0 + \Delta a \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

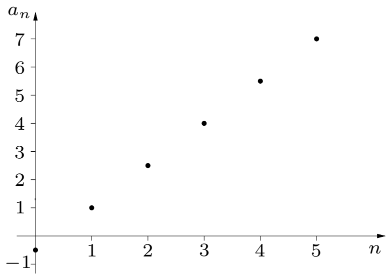
Beispiele

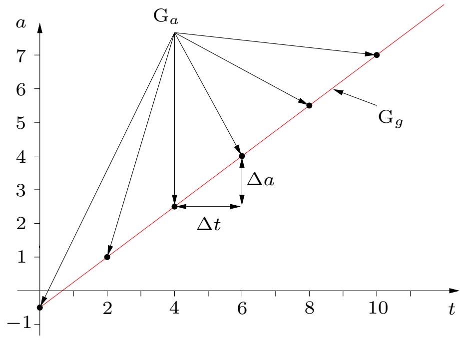
Beispiel: $a_0 = -\frac{1}{2}$, $\Delta t = 2$, $\Delta a = \frac{3}{2}$

$$a_n = f_a(n) = -\frac{1}{2} + n \cdot \frac{3}{2}$$

$$a(t_n) = -\frac{1}{2} + \frac{\Delta a}{\Delta t} \cdot t_n = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot t_n$$

$$g(t) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot t$$





Beispiele arithmetischer Folgen und Reihen:

$$3, 7, 11, \dots, 43$$
$$a_0 = 3, \Delta a = 4, n = 10$$
$$\text{oder} \quad a_n = 3 + n \cdot 4$$
$$\sum_{k=0}^{10} a_k = 11 \cdot 3 + 4 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} = 253$$

$$99, 90, 81, \dots, -99$$
$$a_0 = 99, \Delta a = -9, n = 22$$
$$\text{oder} \quad a_n = 99 - n \cdot 9$$
$$\sum_{k=0}^{22} a_k = 23 \cdot 99 + (-9) \cdot \frac{22 \cdot 23}{2} = 0$$

Definitionen und Regeln

Exponentielles Wachstum

Eine Größe a wächst in gleichen Zeiten Δt immer um den gleichen Faktor q. Mit $a(0) = a_0$ und $a(n \cdot \Delta t) = a_n$ folgt

$$a_n = a_0 \cdot q^n$$

Die Menge aller Zahlenpaare $(n|a_n)$ bilden die Funktion

$$f_{\mathrm{a}}: \quad n \to a_n = f_{\mathrm{a}}(n) = a_0 \cdot q^n$$

mit der Definitionsmenge $\mathbb{N}_0$. f_{a} heißt *geometrische Folge.*
Man kann a auch als Funktion der Zeiten

$$t_n = n\Delta t$$

betrachten. Wegen $n = \dfrac{t_n}{\Delta t}$ folgt mit $\alpha = \dfrac{1}{\Delta t}$

$$a: \quad t_n \to a_n = a(t_{\mathrm{n}}) = a_0 \cdot q^{\alpha t_n}$$

Der Graf G_a von a besteht aus den Punkten $(t_n|a_n)$. G_a ist eine Teilmenge des Grafen von

$$g: \quad t \to g(t) = a_0 \cdot q^{\alpha t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Rekursive Definition der geometrischen Folge:

$$a_{k+1} = a_k \cdot q \quad \text{oder} \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = q$$

Der Quotient zweier aufeinanderfolgender Zahlen einer geometrischen Folge ist konstant.

Folgende Summenformel beweist man leicht durch Ausmultiplizieren:

$$\sum_{k=0}^{n} q^n = 1 + q + q^2 + ... + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

Die *geometrische Reihe* ist die Summe der ersten $n + 1$ Zahlen einer geometrischen Folge:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} a_0 q^n = a_0 \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}}$$

Für $|q| < 1$ wird $|q^n|$ immer kleiner, wenn n immer größer wird. Im Grenzfall $n \to \infty$ geht q^n gegen 0. Schreibweise (lim steht für *Limes* oder *Grenzwert*):

$$\lim_{n \to \infty} q^n = 0$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} a_0 q^n = \frac{a_0}{1 - q}}$$

Beispiele

Beispiel: Ein Betrag von 500 € wird langfristig so angelegt, dass er in 10 a um 50% wächst:

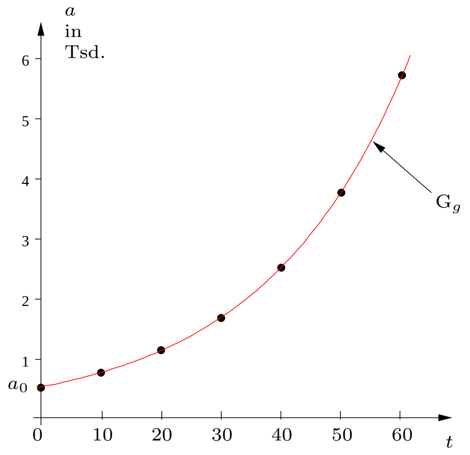
$$a_0 = 500, \quad q = 1{,}5, \quad \Delta t = 10$$

$$\begin{aligned} a_n &= 500 \cdot 1{,}5^n \\ \alpha &= \frac{1}{\Delta t} = 0{,}1 \\ a(t_n) &= 500 \cdot 1{,}5^{0{,}1 t_n} \\ g(t) &= 500 \cdot 1{,}5^{0{,}1 t} \end{aligned}$$

Nach 1 a:

$$g(1) = 500 \cdot 1{,}5^{0{,}1} = 500 \cdot 1{,}04138 = 520{,}69$$

Der jährliche Zins beträgt also 4,138%.

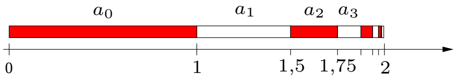


Beispiel: $\quad a_0 = 1, \; q = \dfrac{1}{2}$

$$a_n = \frac{1}{2^n}$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_0 q^n = \frac{\frac{1}{2^{n+1}} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 2 - \frac{1}{2^n}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_0 q^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$



Definitionen und Regeln

Der Logarithmus

Für $a > 0$ und $a \neq 1$ definiert man den Logarithmus von b zur Basis a als Lösung der Gleichung $a^x = b$:

$$\boxed{x = \log_a b \quad \Longleftrightarrow \quad a^x = b}$$

Den Logarithmus zur Basis zehn (Zehnerlogarithmus) kürzt man durch das Zeichen lg ab:

$$\boxed{\lg x = \log_{10} x}$$

Aus den Potenzgesetzen folgen die Rechenregeln für Logarithmen:

$$\begin{aligned}
\log_a(bc) &= \log_a b + \log_a c \\
\log_a \frac{b}{c} &= \log_a b - \log_a c \\
\log_a 1 &= 0 \\
\log_a a &= 1 \\
\log_a \frac{1}{c} &= -\log_a c \\
\log_a b^c &= c \log_a b
\end{aligned}$$

Speziell für Zehnerlogarithmen:

$$\begin{aligned}
\lg(bc) &= \lg b + \lg c \\
\lg \frac{b}{c} &= \lg b - \lg c \\
\lg 1 &= 0 \\
\lg 10 &= 1 \\
\lg \frac{1}{c} &= -\lg c \\
\lg b^c &= c \lg b
\end{aligned}$$

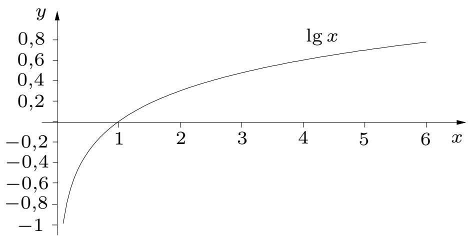
Umrechnen auf eine andere Basis:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Mit $c = 10$:

$$\log_a b = \frac{\lg b}{\lg a}$$

Die Logarithmusfunktion $f(x) = \log_a x$ hat die Definitionsmenge $D = \mathbb{R}^+$ und enthält für alle $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ den Punkt $(1|0)$.



Beispiele

$$2^3 = 8 \quad \Longrightarrow \quad \log_2 8 = 3$$

$$\lg 10^n = n, \quad \lg 100 = 2, \quad \lg 1000 = 3$$

$$\log_a \frac{a^5 b^3}{c^7} = 5 + 3 \log_a b - 7 \log_a c$$

$$5^x = 10 \quad \Longrightarrow \quad x = \log_5 10 = \frac{\lg 10}{\lg 5} = \frac{1}{\lg 5}$$

$$x^5 = 10 \quad \Longrightarrow \quad x = 10^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{10}$$

Exponentialgleichungen:

$$\begin{aligned}
4^{3x} &= 2 \cdot 5^{2x} \mid \lg \\
3x \cdot \lg 4 &= \lg 2 + 2x \cdot \lg 5 \\
x(3 \lg 4 - 2 \lg 5) &= \lg 2 \\
x &= \frac{\lg 2}{3 \lg 4 - 2 \lg 5} \approx 0{,}737
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3^{2x} - 21 \cdot 3^x &= -54 \\
(3^x)^2 - 21 \cdot 3^x &= -54 \\
\text{Substitution:} \quad 3^x &= y \\
y^2 - 21y &= -54 \\
y^2 - 2 \cdot \frac{21}{2}\, y + \left(\frac{21}{2}\right)^2 &= -54 + \frac{21^2}{4} \\
\left(y - \frac{21}{2}\right)^2 &= \frac{225}{4} \\
y_1 = 3^{x_1} = 3 \quad &\Longrightarrow \quad x_1 = 3 \\
y_2 = 3^{x_2} = 18 \quad &\Longrightarrow \quad x_2 = \frac{\lg 18}{\lg 3} \approx 2{,}6309
\end{aligned}$$

Logarithmusgleichungen:

$$\begin{aligned}
2 \cdot \log_x 5 + \log_x 7 &= 3 \\
\log_x \left(5^2 \cdot 7\right) &= 3 \\
\log_x 175 &= 3 \\
x^3 &= 175 \\
x &= 175^{\frac{1}{3}} \approx 5{,}593
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log_2 x^3 + 2 \cdot \log_3 x &= 5 \\
3 \log_2 x + 2 \cdot \frac{\log_2 x}{\log_2 3} &= 5 \\
\log_2 x \left(3 + \frac{2}{\log_2 3}\right) &= 5 \\
\log_2 x &= \frac{5}{3 + \frac{2}{\log_2 3}} \\
x &= 2^{\frac{5}{3 + \frac{2}{\log_2 3}}} \approx 2{,}2551
\end{aligned}$$

Definitionen und Regeln

Die Exponentialfunktion

Eine Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = a \cdot b^{\alpha x} \quad \text{mit} \quad b > 0,\, b \neq 1$$

heißt *Exponentialfunktion*.
Eigenschaften der Exponentialfunktion

$$f(x) = a \cdot b^{\alpha x}$$

für $a > 0$:

$$\begin{aligned} f(0) &= a & & \\ f(x) &> 0 & &\text{für alle } x \in \mathbb{R} \\ \lim_{x\to\infty} f(x) &= +\infty & &\text{für} \quad \alpha > 0 \\ \lim_{x\to-\infty} f(x) &= 0 & &\text{für} \quad \alpha > 0 \\ \lim_{x\to\infty} f(x) &= 0 & &\text{für} \quad \alpha < 0 \\ \lim_{x\to-\infty} f(x) &= +\infty & &\text{für} \quad \alpha < 0 \end{aligned}$$

$$f(x+c) = ab^{\alpha(x+c)} = ab^{\alpha x + \alpha c} = b^{\alpha c} \cdot ab^{\alpha x}$$

$$f(x+c) = b^{\alpha c} \cdot f(x)$$

Schreitet man auf der x-Achse immer um den Wert c voran, multipliziert sich der Funktionswert immer mit der gleichen Zahl $b^{\alpha c}$. Man kann c so wählen (Verdopplungsintervall), dass $b^{\alpha c} = 2$ ist:

$$b^{\alpha c} = 2 \quad \Longrightarrow \quad c = \frac{\log_b 2}{\alpha}$$

Wählt man c so , dass $b^{\alpha c} = \frac{1}{2}$ ist, dann erhält man das Halbierungsintervall

$$c = \frac{\log_b \frac{1}{2}}{\alpha} = -\frac{\log_b 2}{\alpha}$$

Wechsel der Basis bei einer Exponentialfunktion:

$$b = s^{\log_s b} \quad \Longrightarrow \quad b^x = \left(s^{\log_s b}\right)^x = s^{x \log_s b}$$

Zum Beispiel

$$2^x = 10^{x \log_{10} 2} = 10^{x \lg 2}$$

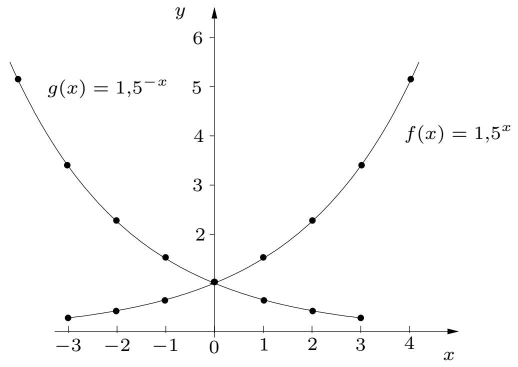
Handhabung großer Zahlen:

$$\begin{aligned} x &= 5^{5^5} = 5^{3125} \\ \lg x &= 3125 \cdot \lg 5 = 2184{,}281264 \\ x &= 10^{2184{,}281264} = 10^{0{,}281264} \cdot 10^{2184} \\ x &= 1{,}9110 \cdot 10^{2184} \end{aligned}$$

x hat also 2185 Ziffern und beginnt mit den Ziffern 19110... und hat die letzte Ziffer 5.

Beispiele

Die Exponentialfunktionen $a \cdot b^{\alpha x}$ für $a = 1$, $b = 1{,}5$ und $\alpha = 1$ (f) bzw. $\alpha = -1$ (g):



$$f(x) = 1{,}5^x$$

$$g(x) = 1{,}5^{-x} = \left(\frac{2}{3}\right)^x$$

Verdopplungsintervall bei f:

$$c = \frac{\log_{1,5} 2}{1} = \frac{\lg 2}{\lg 1{,}5} \approx 1{,}71$$

Halbierungsintervall bei g:

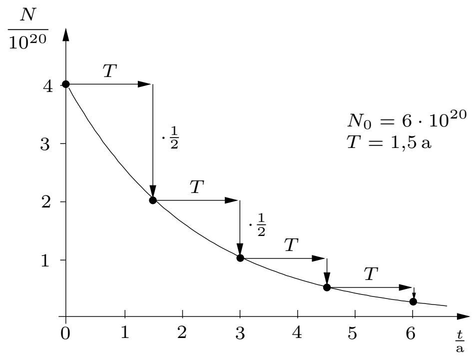
$$c = -\frac{\log_{1,5} 2}{-1} = \frac{\lg 2}{\lg 1{,}5} \approx 1{,}71$$

Radioaktiver Zerfall:
Ein radioaktives Material besteht zur Zeit $t_0 = 0$ aus N_0 Atomen. In der Zeit T (*Halbwertszeit*) zerfällt die Hälfte der vorhandenen Atome. Zur Zeit t sind noch N Atome des ürsprünglichen Materials vorhanden:

$$N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$$

T ist das Halbierungsintervall, d.h.

$$N(t+T) = \frac{1}{2} \cdot N(t)$$



Definitionen und Regeln

Die ganzrationale Funktion

Ein Term der Form

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

mit $a_n \neq 0$ heißt *Polynom* vom Grad n.
Eine Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = P_n(x)$$

heißt *ganzrational* vom Grad n. Die Zahlen a_0, a_1 bis a_n heißen *Koeffizienten.*

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = \\ &= x^n \left(a_n + \underbrace{\frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}}_{r(x)} \right) = \\ &= x^n(a_n + r(x)) \end{aligned}$$

Je weiter man sich auf der x-Achse vom Ursprung entfernt, d.h. je größer $|x|$ wird ($|x| \gg 1$), um so kleiner wird $|r(x)|$, da dort x in jedem Summanden im Nenner steht. Man kann $|x|$ immer so groß wählen, dass $|r(x)|$ kleiner als jede beliebig kleine Zahl *varepsilon* wird. Man sagt dazu:

> Der Grenzwert von $r(x)$ mit $|x|$ gegen Unendlich (bzw. x gegen plus oder minus Unendlich) ist null.
> Schreibweise:
>
> $$\lim_{x \to \pm\infty} r(x) = 0$$

Für $|x| \gg 1$ ist also $r(x)$ in der Summe gegenüber a_n vernachlässigbar, d.h. $f(x)$ verhält sich für $|x| \gg 1$ wie $a_n x^n$.

Beispiele

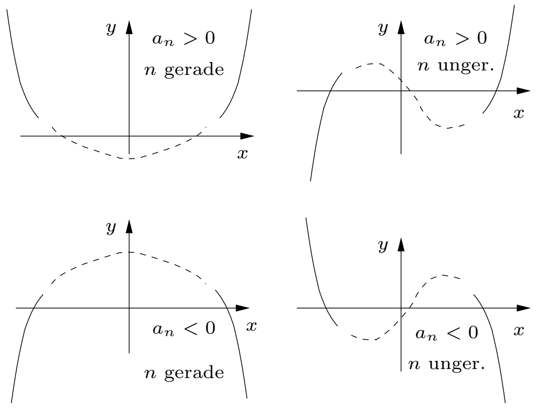
Beispiele ganzrationaler Funktionen vom Grad n:

n	$f(x)$
1	$x - 3$
2	$3x^2 - 5x + 7$
3	$\frac{1}{100}x^3 - x - 1$
9	$-x^9 - x^7 + x^2 - 3$

Das Verhalten von

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

für $|x| \gg 1$:



$a_n > 0$, n gerade $\Longrightarrow$ $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$

$a_n > 0$, n ungerade $\Longrightarrow$ $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

$a_n < 0$, n gerade $\Longrightarrow$ $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty$

$a_n < 0$, n ungerade $\Longrightarrow$ $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \mp\infty$

Für eine ganzrationale Funktion f mit einem Grad $n \geqq 1$ gilt $\lim\limits_{x \to +\infty} |f(x)| = +\infty$, d.h. $f(x)$ kann nicht für alle $x \in \mathbb{R}$ gleich null sein. Wenn nur a_0 ungleich null ist ($n = 0$) ist $f(x) = a_0 \neq 0$. Damit gilt:

> Eine ganzrationale Funktion hat nur dann für alle $x \in \mathbb{R}$ den Wert null, wenn alle Koeffizienten null sind.
>
> $$f(x) = P_n(x) = 0 \;\forall\, x \in \mathbb{R} \iff a_n = a_{n-1} = \ldots = a_0 = 0$$

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$
$$g(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

Gilt $f(x) = g(x)\;\forall\, x \in \mathbb{R}$, dann folgt $\forall\, x \in \mathbb{R}$

$$f(x) - g(x) = (a_n - b_n)x^n + \ldots + (a_0 - b_0) = 0$$

und damit $a_n - b_n = 0, \; \ldots \;, a_0 - b_0 = 0$

> Zwei ganzrationale Funktionen f und g haben nur dann für alle $x \in \mathbb{R}$ den gleichen Wert, wenn sie die gleichen Koeffizienten besitzen (*Koeffizientenvergleich*).
>
> $$f(x) = g(x)\;\forall\, x \in \mathbb{R} \iff a_n = b_n,\; a_{n-1} = b_{n-1},\; \ldots,\; a_0 = b_0$$

Definitionen und Regeln

Polynomdivision

Wie man zwei Zahlen schriftlich dividiert, kann man auch Polynome durcheinander dividieren. Die Technik der Polynomdivision erklären wir anhand von Beispielen (siehe rechte Spalte).
Dividiert man ein Polynom P vom Grad p durch ein Polynom Q vom Grad q $(q < p)$, dann ist das Ergebnis ein Polynom S vom Grad $s = p - q$ und der Rest ist ein Polynom R mit einem Grad $r < q$:

$$P(x) : Q(x) = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

oder nach Multiplikation mit $Q(x)$:

$$P(x) = S(x)Q(x) + R(x)$$

Dividiert man durch ein Polynom ersten Grades, dann ist R ein Polynom vom Grad null, d.h. eine Konstante c (die auch null sein kann, wenn die Division „aufgeht“). Insbesondere interessieren uns Divisoren Q mit dem Koeffizienten 1 beim x, d.h. $Q(x) = x - b$:

$$P(x) : (x - b) = S(x) + \frac{c}{x - b}$$

oder

$$P(x) = S(x) \cdot (x - b) + c$$

Nullstellen ganzrationaler Funktionen

Ist x_1 eine Nullstelle der ganzrationalen Funktion $P(x)$, dann folgt aus

$$P(x) = S(x) \cdot (x - x_1) + c$$

mit $x = x_1$

$$P(x_1) = S(x_1) \cdot \underbrace{(x_1 - x_1)}_{0} + c = 0,$$

woraus $c = 0$ folgt. Mit einer Nullstelle x_1 von P geht die Division $P(x) : (x - x_1)$ also auf (Rest $c = 0$) und es folgt:

> Ist x_1 eine Nullstelle des Polynoms $P(x)$ mit Grad n, dann gilt
>
> $$P(x) = (x - x_1) \cdot S(x),$$
>
> wobei S ein Polynom vom Grad $n - 1$ ist.

$(x - x_1)$ heißt *Linearfaktor* von P. Da sich bei jeder Division durch einen Linearfaktor der Grad des Polynoms um eins erniedrigt, kann ein Polynom vom Grad n höchstens n Linearfaktoren und damit auch höchstens n Nullstellen besitzen.

Beispiele

$$\begin{array}{l}
\big(\;x^4 \qquad\quad -1\big) \div \big(x^2+1\big) = x^2 - 1\\
\underline{-x^4 - x^2}\\
\qquad\quad -x^2 - 1\\
\qquad\quad \underline{\;\;\; x^2 + 1}\\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\big(\;x^4 \qquad\quad -1\big) \div \big(x^2+2\big) = x^2 - 2 + \dfrac{3}{x^2+2}\\
\underline{-x^4 - 2x^2}\\
\qquad\quad -2x^2 - 1\\
\qquad\quad \underline{\;\;\; 2x^2 + 4}\\
\qquad\qquad\quad 3
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\big(\;x^3 - x^2 + x - 1\big) \div \big(x - 1\big) = x^2 + 1\\
\underline{-x^3 + x^2}\\
\qquad\qquad\quad x - 1\\
\qquad\qquad \underline{-x + 1}\\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\big(\;x^3 \;\; - x^2 \;\; + x - 1\big) \div \big(x - 2\big) = x^2 + x + 3 + \dfrac{5}{x-2}\\
\underline{-x^3 + 2x^2}\\
\qquad\quad x^2 \;\; + x\\
\qquad \underline{-x^2 + 2x}\\
\qquad\qquad\quad 3x - 1\\
\qquad\qquad \underline{-3x + 6}\\
\qquad\qquad\qquad\quad 5
\end{array}$$

Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 5x + 12$$

Durch Probieren findet man heraus, dass $x_1 = -1$ eine Nullstelle von f ist.

$$\begin{array}{l}
\big(\;x^3 - 6x^2 \;\; + 5x + 12\big) \div \big(x + 1\big) = x^2 - 7x + 12\\
\underline{-x^3 \;\; - x^2}\\
\qquad -7x^2 \;\; + 5x\\
\qquad \underline{\;\;\; 7x^2 \;\; + 7x}\\
\qquad\qquad\quad 12x + 12\\
\qquad\qquad \underline{-12x - 12}\\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Es gilt also

$$f(x) = (x + 1)(x^2 - 7x + 12)$$

Das quadratische Polynom $x^2 - 7x + 12$ hat die Nullstellen $x_2 = 3$ und $x_3 = 4$ (quadratische Gleichung!), woraus folgt

$$f(x) = (x + 1)(x - 3)(x - 4)$$

mit den Nullstellen $x_1 = -1$, $x_2 = 3$ und $x_3 = 4$.

Definitionen und Regeln

Zerlegung in Linearfaktoren

f ist eine ganzrationale Funktion vom Grad n, $x_1, x_2, \dots x_r$ mit $r \leqq n$ sind Nullstellen von f:

$$\boxed{f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_r)S(x)}$$

mit Grad von S gleich $n - r$.
Enthält eine ganzrationale Funktion f v-mal den Linearfaktor $x - x_m$, dann kann man schreiben:

$$f(x) = (x - x_m)^v S(x)$$

v ist die *Vielfachheit* der Nullstelle x_m (v-fache Nullstelle).
I sei ein Intervall, dessen Mittelpunkt x_m ist, das aber keine weitere Nullstelle von f enthält. In I hat $S(x)$ also überall das gleiche Vorzeichen.
Ist v gerade, dann hat $f(x) = (x - x_m)^v S(x)$ im punktierten Intervall $I \setminus \{x_m\}$ wegen

$$(x - x_m)^v \geqq 0$$

überall das gleiche Vorzeichen wie $S(x)$, d.h. f hat an der Nullstelle x_m keinen Vorzeichenwechsel (VZW). Für v gerade hat f bei x_m also eine die x-Achse nur *berührende* (und keine schneidende) Nullstelle.
Für ein ungerades v dagegen gilt

$$x < x_m \implies x - x_m < 0 \implies (x - x_m)^v < 0$$

und

$$x > x_m \implies x - x_m > 0 \implies (x - x_m)^v > 0$$

d.h. $(x - x_m)^v$ und damit auch $f(x)$ wechselt bei x_m sein Vorzeichen (schneidende Nullstelle). Wie wir später noch genauer sehen, ist die schneidende Nullstelle für v ungerade und $v \geqq 3$ *flach*, d.h. die x-Achse bei x_m Tangente an den Funktionsgrafen.

Ist eine ganzrationale Funktion f vom Grad n mit der Gleichung

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$$

voll in Linearfaktoren zerlegbar, dann gilt

$$f(x) = a_n (x - x_1)^{v_1} \cdot \dots \cdot (x - x_m)^{v_m}$$

mit

$$v_1 + v_2 + \dots + v_m = n$$

Beispiele

Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$$

Durch Probieren findet man heraus, dass $x_1 = 2$ eine Nullstelle von f ist.

$$\begin{array}{l} \big(\quad x^3 \ - x^2 - 8x + 12\big) \div \big(x - 2\big) = x^2 + x - 6 \\ \underline{\ -x^3 + 2x^2\ } \\ \qquad\quad x^2 - 8x \\ \qquad \underline{\ -x^2 + 2x\ } \\ \qquad\qquad -6x + 12 \\ \qquad\qquad \underline{\quad 6x - 12\ } \\ \qquad\qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

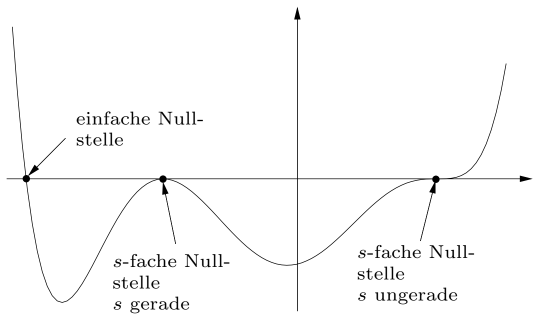
Es gilt also

$$f(x) = (x - 2)(x^2 + x - 6)$$

Das quadratische Polynom $x^2 + x - 6$ hat die Nullstellen $x_2 = 2$ und $x_3 = -3$ (quadratische Gleichung!), woraus folgt

$$f(x) = (x - 2)(x - 2)(x + 3) = (x - 2)^2(x + 3)$$

mit den Nullstellen $x_1 = x_2 = 2$ und $x_3 = -3$.
2 ist eine doppelte Nullstelle!



Gesucht ist die Gleichung einer ganzrationalen Funktion f vierten Grades durch die Punkte $\left(-\frac{3\pi}{2}|0\right)$, $\left(-\frac{\pi}{2}|0\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}|0\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2}|0\right)$ und $(0|1)$. Ist $f(x)$ ein gute Näherung für $g(x) = \cos x$?

$$f(x) = a_4 \left(x + \frac{3\pi}{2}\right)\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$f(0) = a_4 \frac{3\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{3\pi}{2} = \frac{9\pi^4}{16} = 1$$

$$a_4 = \frac{16}{9\pi^4}$$

$$f(\pi) = \frac{16}{9\pi^4} \cdot \left(-\frac{15\pi^4}{16}\right) = -\frac{5}{3}$$

$\cos \pi = -1$, also keine gute Näherung für $|x| > \frac{\pi}{2}$, für $|x| < \frac{\pi}{2}$ weniger als 13% Fehler (Aufgabe!).

Definitionen und Regeln

Manipulationen am Funktionsgrafen

Der Graf von f wird einer der folgenden Manipulationen unterworfen, das Ergebnis ist der Graf von g:

Verschieben um den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$:

$$g = V_{\vec{v}} f: \qquad g(x) = f(x-a) + b$$

Achsenspiegelung an der x-Achse:

$$g = A_x f: \qquad g(x) = -f(x)$$

Achsenspiegelung an an der y-Achse:

$$g = A_y f: \qquad g(x) = f(-x)$$

Dehnung um den Faktor k_x in x-Richtung:

$$g(x) = f\left(\frac{x}{k_x}\right)$$

Dehnung um den Faktor k_y in y-Richtung:

$$g(x) = k_y f(x)$$

Zentrische Streckung an $(0|0)$ mit dem Faktor k:

$$g = Z_{0,k} f: \qquad g(x) = kf\left(\frac{x}{k}\right)$$

Punktspiegelung am Ursprung ($P_{\mathrm{O}} = Z_{\mathrm{O},-1}$):

$$g = P_{\mathrm{O}} f: \qquad g(x) = -f(-x)$$

Man kann auch mehrere Manipulationen kombinieren; die zuerst angewandte steht rechts: Zuerst Verschieben um $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, dann Spiegelung am Ursprung:

$$\begin{aligned} g(x) &= P_0 V_{\vec{v}} f(x) = P_0(f(x-a)+b) = \\ &= -(f(-x-a)+b) = -f(-x-a) - b \end{aligned}$$

Zuerst Spiegelung am Ursprung, dann Verschieben um $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} h(x) &= V_{\vec{v}} P_0 f(x) = V_{\vec{v}}(-f(-x)) = \\ &= -f(-(x-a)) + b = -f(-x+a) + b \end{aligned}$$

$g(x) \neq h(x)$, d.h. $P_0 V_{\vec{v}} \neq V_{\vec{v}} P_0$ Das Ergebnis von hintereinander ausgeführten Manipulationen hängt von der Reihenfolge ab!

Beispiele

Beispiel: $f(x) = x^3 - 3x^2 = x^2(x-3)$

$$g(x) = A_x f(x) = -f(x) = -x^3 + 3x^2$$
$$h(x) = A_y f(x) = f(-x) = -x^3 - 3x^2$$

Verschiebung um $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$:

$$k(x) = f(x-3) + 2 = x^3 - 12x^2 + 45x - 52$$

Dehnung: $k_x = 2$, $k_y = \frac{1}{2}$:

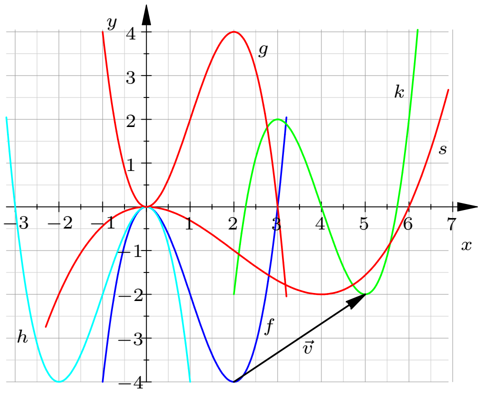
$$s(x) = \frac{1}{2} f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{16}x^3 - \frac{3}{8}x^2$$

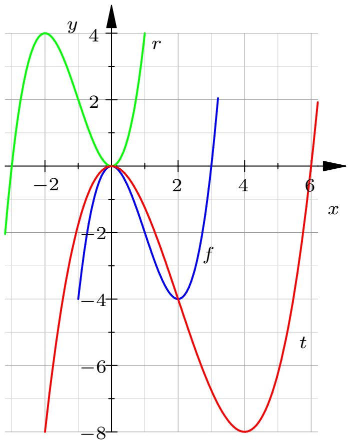
Punktspiegelung am Ursprung:

$$r(x) = P_{\mathrm{O}} f(x) = -f(-x) = x^3 + 3x^2$$

Zentrische Streckung am Ursprung, $k = 2$:

$$t(x) = Z_{\mathrm{O},2} f(x) = 2f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2$$





Definitionen und Regeln

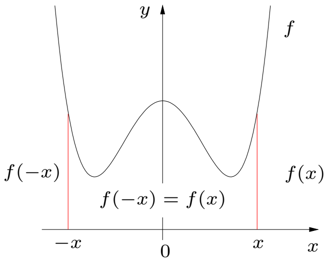
Symmetrie von Funktionsgrafen

Geht der Graf G_f einer Funktion f bei einer Spiegelung an der y-Achse in sich selbst über, d.h. gilt $A_y f = f$, dann heißt f symmetrisch zur y-Achse.

$$A_y f = f \quad \Longrightarrow \quad f(-x) = f(x)\ \forall x \in D_f$$

$\forall$ ist eine Abkürzung für „für alle“.

$$\boxed{\begin{array}{l} f \text{ symmetrisch zur } y\text{-Achse} \iff \\ \qquad\qquad f(-x) = f(x)\ \forall x \in D_f \\ f \text{ heißt in diesem Fall } \textit{gerade}. \end{array}}$$



Terme achsensymmetrischer Funktionen:

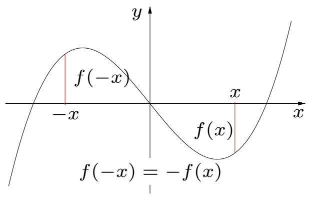
$$x^2,\ x^4,\ x^n \text{ mit geradem } n,\ \cos x$$

$$\sin x^2,\ 2^{x^4},\ x^6 - x^4 + x^2 - 1,\ f(x^2)$$

Geht der Graf G_f einer Funktion f bei einer Punktspiegelung am Ursprung in sich selbst über, d.h. gilt $P_\mathrm{O} f = f$, dann heißt f symmetrisch zum Ursprung.

$$P_\mathrm{O} f = f \quad \Longrightarrow \quad -f(-x) = f(x)\ \forall x \in D_f$$

$$\boxed{\begin{array}{l} f \text{ symmetrisch zum Ursprung} \iff \\ \qquad\qquad f(-x) = -f(x)\ \forall x \in D_f \\ f \text{ heißt in diesem Fall } \textit{ungerade}. \end{array}}$$



Terme punktsymmetrischer Funktionen:

$$x,\ x^3,\ x^n \text{ mit ungeradem } n,\ \frac{1}{x},\ \sin x$$

$$\tan x,\ x^5 - x^3 - x$$

Beispiele

Wir betrachten eine ganzrationale Funktion dritten Grades:

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Verschiebung von f um $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} g(x) &= a_3(x-a)^3 + a_2(x-a)^2 + a_1(x-a) + a_0 + b \\ &= a_3x^3 + \underbrace{(a_2 - 3a_3a)}_{a_2'}x^2 + \underbrace{(3a_3a^2 - 2a_2a + a_1)}_{a_1'}x + \\ &\qquad + \underbrace{(-a_3a^3 + a_2a^2 - a_1a + a_0 + b)}_{a_0'} \end{aligned}$$

Wir wählen a und b so, dass $a_2' = 0$ und $a_0' = 0$ gilt:

$$a_2' = 0 \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{a_2}{3a_3}$$

Einsetzen in die Bedingung $a_0' = 0$:

$$\begin{aligned} b &= a_3a^3 - a_2a^2 + a_1a - a_0 = \\ &= -\frac{2a_2^3}{27a_3^2} + \frac{a_1a_2}{3a_3} - a_0 \end{aligned}$$

Bei dieser speziellen Wahl von a und b, die für $a_3 \neq 0$ immer möglich ist, gilt also

$$g(x) = a_3x^3 + a_1'x,$$

d.h. der Graf von g ist punktsymmetrisch zum Ursprung. Da der Graf von f eine Verschiebung des Grafen von g um $-\vec{v}$ ist, ist der Graf von f punktsymmetrisch zum Punkt $\mathrm{Z}(-a|-b)$.

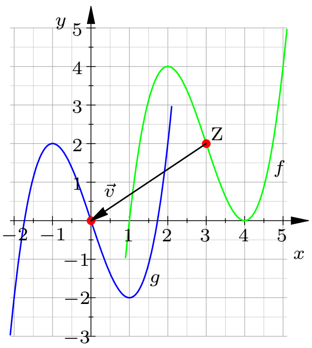
$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Der Graf einer ganzrationalen Funktion} \\ \text{dritten Grades ist punktsymmetrisch.}\end{array}}$$

Beispiel: $\quad f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 16$

$$a = \frac{-9}{3 \cdot 1} = -3$$

$$b = -\frac{2 \cdot (-9)^3}{27 \cdot 1^3} + \frac{24 \cdot (-9)}{3 \cdot 1} + 16 = -2$$

$\Longrightarrow \quad f$ ist punktsymmetrisch zu Z(3|2).

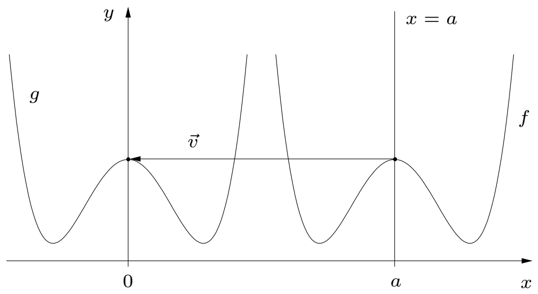


Definitionen und Regeln	**Beispiele**

f ist symmetrisch zur Achse $x = a$, wenn die um $\vec{v} = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix}$ verschobene Funktion g symmetrisch zur y-Achse ist:

$$g(x) = f(x + a) = g(-x) = f(-x + a)$$

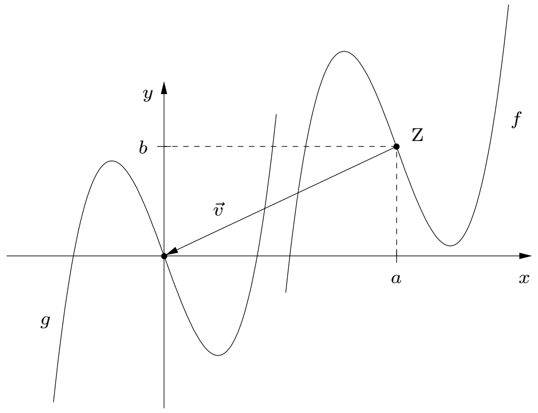
$$\boxed{\begin{array}{c} f \text{ symmetrisch zur Achse } x = a \iff \\ f(a - x) = f(a + x) \\ \forall x \text{ mit } a - x \in D_f \text{ und } a + x \in D_f \end{array}}$$



f ist symmetrisch zum Punkt Z$(a|b)$, wenn die um $\vec{v} = \begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix}$ verschobene Funktion g symmetrisch zum Ursprung ist:

$$g(x) = f(x + a) - b = -g(-x) =$$
$$-\left[f(-x + a) - b\right] = -f(a - x) + b$$

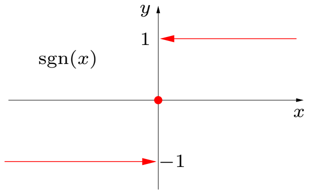
$$\boxed{\begin{array}{c} f \text{ symmetrisch zum Punkt Z}(a|b) \iff \\ f(a - x) + f(a + x) = 2b \\ \forall x \text{ mit } a - x \in D_f \text{ und } a + x \in D_f \end{array}}$$



Spezielle Funktionen

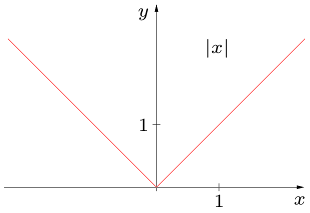
Die *Signumfunktion* (Vorzeichenfunktion):

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$



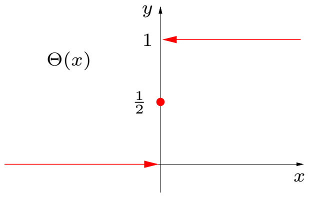
Die *Betragsfunktion*:

$$|x| = x \cdot \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -x & \text{für } x < 0 \\ x & \text{für } x \geqq 0 \end{cases}$$



Die *Thetafunktion* oder *Heaviside-Funktion* (Sprungfunktion):

$$\Theta(x) = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{sgn}(x)) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{für } x = 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$



Definitionen und Regeln

Grenzwerte von Funktionen

Der Grenzwert mit $x \to \infty$

Wenn sich bei immer größer werdendem x der Wert einer Funktion f immer mehr der Zahl a annähert, dann sagt man, der *Grenzwert* (*Limes*) von f mit x gegen unendlich ist a:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = a$$

Das „immer mehr annähern“ bedeutet: Für jedes beliebige $\varepsilon > 0$ (und sei es noch so klein) gibt es eine Zahl x_0, so dass für *jedes* $x > x_0$ der Abstand des Funktionsgrafen von der Geraden $y = a$ kleiner als ε ist:

$$|f(x) - a| < \varepsilon$$

Mit den Abkürzungen $\forall$ („für alle“) und $\exists$ („es existiert ein“) lautet die endgültige Definition des Grenzwertes mit x gegen unendlich:

$$\boxed{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a \quad \Longleftrightarrow \\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, x_0 \text{ mit } |f(x) - a| < \varepsilon\, \forall\, x > x_0\end{array}}$$

Analog definiert man:

$$\boxed{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a \quad \Longleftrightarrow \\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, x_0 \text{ mit } |f(x) - a| < \varepsilon\, \forall\, x < x_0\end{array}}$$

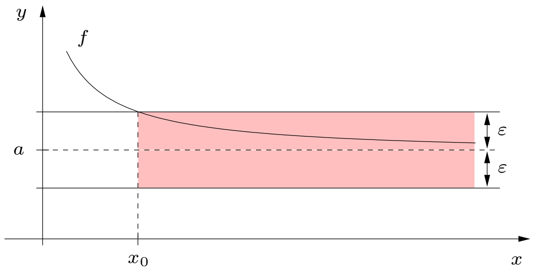
$$\boxed{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty \quad \Longleftrightarrow \\ \qquad \forall\, c > 0\ \exists\, x_0 \text{ mit } f(x) > c\, \forall\, x > x_0\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty \quad \Longleftrightarrow \\ \qquad \forall\, c < 0\ \exists\, x_0 \text{ mit } f(x) < c\, \forall\, x > x_0\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \quad \Longleftrightarrow \\ \qquad \forall\, c > 0\ \exists\, x_0 \text{ mit } f(x) > c\, \forall\, x < x_0\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty \quad \Longleftrightarrow \\ \qquad \forall\, c < 0\ \exists\, x_0 \text{ mit } f(x) < c\, \forall\, x < x_0\end{array}}$$

Beispiele



Als Beispiel betrachten wir die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{2x}{1+x}$$

Die Wertetabelle

x	1	9	99	999	9999
$f(x)$	1	1,8	1,98	1,998	1,9998

lässt vermuten, dass $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2$ gilt.

Beweis:

Wegen $x \to \infty$ ist sicher $1 + x > 0 \quad \Longrightarrow$

$$|f(x) - 2| = \left|\frac{2x}{1+x} - 2\right| = \left|\frac{2x - 2 - 2x}{1+x}\right| =$$

$$= \left|\frac{-2}{1+x}\right| = \frac{2}{1+x} < \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow$$

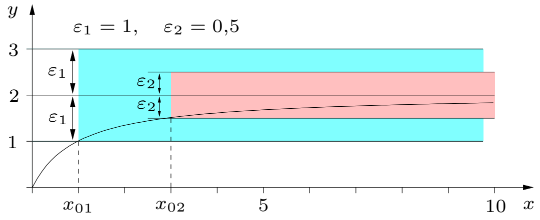
$$x > \frac{2}{\varepsilon} - 1$$

Wählt man $x_0 = \dfrac{2}{\varepsilon} - 1$, dann gilt also

$$|f(x) - 2| < \varepsilon\ \forall\, x > x_0,$$

d.h.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$$



ε	1	0,5	0,1	10^{-3}	10^{-6}
x_0	1	3	19	1999	1 999 999

Definitionen und Regeln

Eine Funktion f heißt *konvergent* für $x \to +\infty$, wenn der Grenzwert für $x \to +\infty$ existiert, d.h. wenn $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$ mit $a \in \mathbb{R}$. Man sagt auch, f konvergiert gegen a mit $x \to +\infty$.

Analog definiert man die Konvergenz für $x \to -\infty$.

Konvergiert f für $x \to +\infty$ oder $x \to -\infty$ gegen a, dann nennt man die Gerade $y = a$, an die sich die Funktion annähert, eine waagrechte *Asymptote* der Funktion.

Eine nicht konvergente Funktion heißt *divergent.*

Beispiele von Funktionen, die für $x \to \pm\infty$ divergieren:

- alle ganzrationalen Funktionen mit Grad $n \geqq 1$
- $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$

Die Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ mit $a > 1$ ist divergent für $x \to +\infty$ und konvergiert für $x \to -\infty$ gegen 0.

$$\boxed{\begin{array}{c} \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = a \quad \Longleftrightarrow \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a \text{ und } \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty \quad \Longleftrightarrow \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \text{ und } \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp\infty \quad \Longleftrightarrow \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \text{ und } \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \end{array}}$$

Wenn alle beteiligten Grenz- und Funktionswerte existieren und die im Nenner nicht null sind, gelten folgende Regeln (analog für $x \to -\infty$):

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to\infty} f(x) \pm \lim_{x\to\infty} g(x)$$

$$\lim_{x\to\infty} (f(x)g(x)) = \lim_{x\to\infty} f(x) \cdot \lim_{x\to\infty} g(x)$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} f(x)}{\lim\limits_{x\to\infty} g(x)}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to\infty} g(x)\right)$$

Beispiele

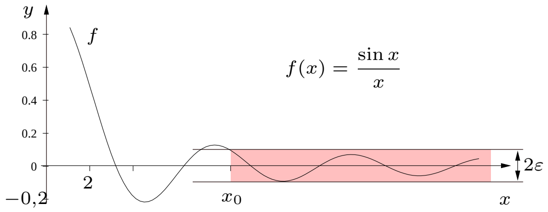
Beispiel: Die Funktion $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ konvergiert für $x \to +\infty$ gegen 2 (siehe Seite vorher). Die Gerade $y = 2$ ist waagrechte Asymptote.

Beispiel: $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ konvergiert für $x \to \pm\infty$ gegen 0.
Beweis für $x \to +\infty$:

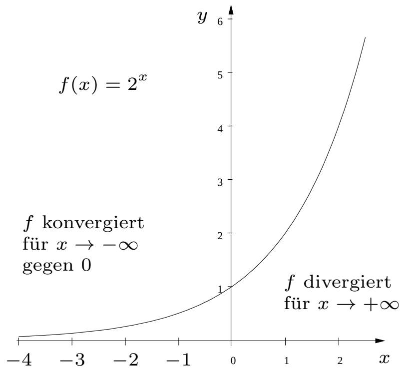
$|\sin x| \leqq 1$ und $|x| = x$ (wegen $x \to +\infty$) $\implies$

$$|f(x) - 0| = \left|\frac{\sin x}{x}\right| \leqq \frac{1}{x} < \varepsilon$$

ist erfüllt für alle x mit $x > x_0 = \dfrac{1}{\varepsilon}$.



Beispiel:



Beispiel:

$$\lim_{x\to\infty} 2^{3-\frac{1}{x}} = 2^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\frac{1}{x}\right)} = 2^3 = 8$$

Beispiel:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{1}{x}}{5+2^{-x}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(5+2^{-x}\right)} =$$

$$\frac{1-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}}{5+\lim\limits_{x\to\infty} 2^{-x}} = \frac{1-0}{5+0} = \frac{1}{5}$$

Definitionen und Regeln

Grenzwerte mit Tendenz

Ist $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$ und gibt es ein x_0 mit

$$f(x) > a \ \forall\ x > x_0,$$

dann nähert sich f von oben her an die Gerade $y = a$ an. Symbolische Schreibweise:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = a^+$$

Analog:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = a \wedge \exists x_0 \text{ mit } f(x) < a \ \forall\ x > x_0$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = a^-$$

Praktische Berechnung von Grenzwerten

Die Symbole $+\infty$ und $-\infty$ sind keine reellen Zahlen und unterliegen somit auch nicht den gewohnten Rechengesetzen. Trotzdem gibt es einige praktische Regeln, die aber immer als Abkürzungen für ausführliche Grenzwertschreibweisen aufzufassen sind.
Für die Regel

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \text{ und } \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$
$$\Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} [f(x)\cdot g(x)] = +\infty$$

schreibt man kurz

$$(+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$$

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{f(x)} = 0}$$

oder kurz

$$\frac{1}{\pm\infty} = 0$$

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0^\pm \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{f(x)} = \pm\infty}$$

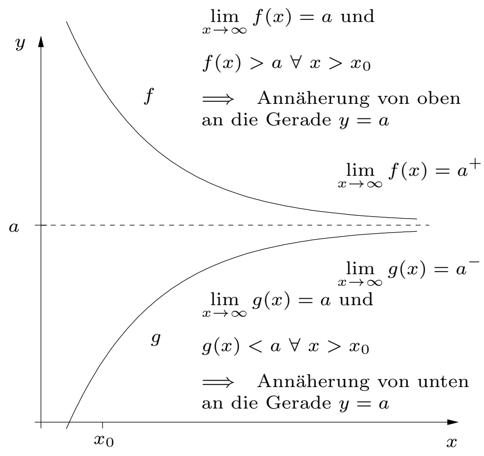
oder kurz

$$\frac{1}{0^\pm} = \pm\infty$$

Zusammenfassung der Kurzregeln:

$$\boxed{\begin{aligned} (+\infty)+(+\infty) &= +\infty \\ (+\infty)\cdot(+\infty) &= +\infty \\ (+\infty)\cdot(-\infty) &= -\infty \\ \frac{1}{\pm\infty} &= 0^\pm \\ \frac{1}{0^\pm} &= \pm\infty \end{aligned}}$$

Beispiele



$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0^\pm$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^a} = 0^+ \quad \text{für } a > 0$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{a^x} = 0^+ \quad \text{für } a > 1$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\lg x} = 0^+$$

Bei gebrochen-rationalen Funktionen (Quotient zweier Polynome) dividiert man durch die höchste Nennerpotenz:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3 - x^2 + 2}{4 - 2x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{3 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}}{\frac{4}{x^3} - 2} = \\ = \frac{3 - 0 + 0}{0 - 2} = -\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^4 - x^2 + 2}{2x^3 - x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}}{2 - \frac{1}{x^2}} = \\ = \frac{\infty - 0 + 0}{2 - 0} = +\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^3 - x^2 + 2}{2x^4 - x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^4}}{2 - \frac{1}{x^3}} = \\ = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{x}\left(3 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}\right)}{2 - \frac{1}{x^3}} = \frac{0^\pm\cdot(3 - 0 + 0)}{2 - 0} = 0^\pm$$

Es gibt keine sinnvollen Kurzregeln für

$$\infty - \infty, \quad 0\cdot\infty, \quad \frac{\infty}{\infty}$$

Definitionen und Regeln

Der Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a^x}{x^n}$

$$\boxed{a>1 \quad\Longrightarrow\quad \lim_{x\to\infty}\frac{a^x}{x^n}=+\infty}$$

Beweis:

Fall 1: $n<0 \quad\Longrightarrow\quad n=-m$ mit $m>0$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a^x}{x^n}=\lim_{x\to\infty}\left(a^x\cdot x^m\right)=(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$$

Fall 2: $n>0$

Wir müssen beweisen, dass es für jedes $c>0$ ein x_0 gibt mit

$$\frac{a^x}{x^n}>c\ \forall\ x>x_0 \qquad (1)$$

Mit $b=a^{\frac{1}{n}}$ und $c_0=c^{\frac{1}{n}}$ folgt

$$\begin{aligned}\frac{a^x}{x^n}>c \quad&\Longleftrightarrow\quad a^x>cx^n\\ &\Longleftrightarrow\quad (b^x)^n>(c_0x)^n\\ &\Longleftrightarrow\quad b^x>c_0x \qquad (2)\end{aligned}$$

$s(x)$ ist die Änderung der Funktion b^x, wenn sich x um 1 ändert:

$$s(x)=b^{x+1}-b^x=b^x(b-1)$$

Wegen $a>1$ ist auch $b>1$ und damit $b-1>0$. Wir wählen x_1 so, dass $s(x_1)=2c_0$ gilt:

$$s(x_1)=b^{x_1}(b-1)=2c_0 \quad\Longrightarrow$$

$$x_1=\frac{\lg(2c_0)-\lg(b-1)}{\lg b}$$

Wegen $b>1$ ist $s(x)$ monoton steigend, d.h.

$$s(x)>s(x_1)=2c_0 \text{ für } x>x_1$$

$s(x)$ monoton steigend bedeutet, dass b^x mit wachsendem x immer steiler wird. b^x liegt also für $x>x_1$ über der Geraden g durch $(x_1|b^{x_1})$ mit der Steigung $2c_0$:

$$g(x)=b^{x_1}+2c_0(x-x_1)$$

g schneidet die Gerade $y=c_0x$ bei $x=x_0$:

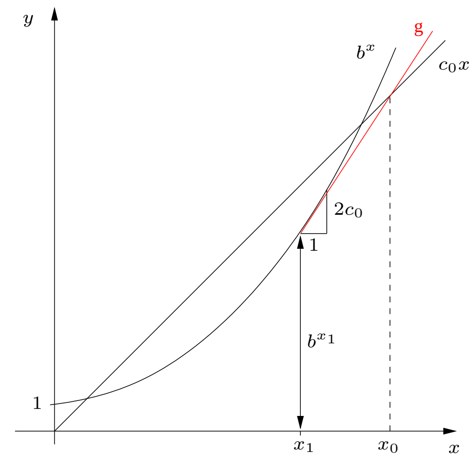
$$g(x_0)=b^{x_1}+2c_0(x_0-x_1)=c_0x_0 \quad\Longrightarrow$$

$$x_0=2x_1-\frac{b^{x_1}}{c_0}$$

Für jedes $x>x_0$ ist sicher (2) und damit auch (1) erfüllt.

Zur nebenstehenden Abbildung im doppelt-logarithmischen Maßstab: statt x wird $\lg x$ und statt $f(x)$ wird $\lg f(x)$ angetragen.

Beispiele



Beispiel: $f(x)=\dfrac{1{,}0001^x}{x^{100}}, \quad c=10^{10}$

$a=1{,}0001$, $b=1{,}000\,001$, $n=100 \quad\Longrightarrow$

$$c_0=c^{\frac{1}{n}}=10^{0,1}=1{,}258925412$$

$$x_1=\frac{\lg(2c_0)-\lg(10^{-6})}{\lg b}=1{,}474\cdot10^7$$

$$x_0=2x_1-\frac{b^{x_1}}{c_0}=2{,}748\cdot10^7$$

Die Unfähigkeit des Taschenrechners beim Umgang mit Zahlen $\geqq 10^{100}$ und $\leqq 10^{-100}$ umgehen wir auf dem Umweg über Logarithmen, z.B.

$$\lg\left(f(10^6)\right)=10^6\lg 1{,}0001-600=-556{,}5727231$$

$$f\left(10^6\right)=10^{-0,5727231}\cdot10^{-556}=2{,}67\cdot10^{-557}$$

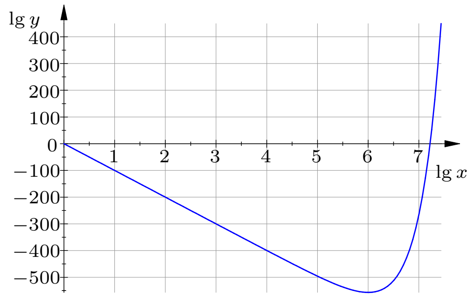
Aufgrund der Wertetabelle

x	10	10^3	10^6
$f(x)$	$1{,}001\cdot10^{-100}$	$1{,}105\cdot10^{-300}$	$2{,}67\cdot10^{-557}$

würde man $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$ vermuten, aber ab x_0 geht es sicher aufwärts:

$$f(x_0)=2{,}82\cdot10^{449}$$

$$f(1{,}687228528\cdot10^7)=1{,}000\cdot10^{10}$$



Grundwissen Mathematik – Jahrgangsstufe 11

Analysis

Definitionen und Regeln

Gebrochenrationale Funktionen

Der Grenzwert $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = a \iff$$
$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0 \text{ mit } |f(x)-a| < \varepsilon\,\forall\,x \in]0,\delta[$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = a \iff$$
$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0 \text{ mit } |f(x)-a| < \varepsilon\,\forall\,x \in]-\delta,0[$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \iff$$
$$\forall\,c > 0\ \exists\,\delta > 0 \text{ mit } f(x) > c\,\forall\,x \in]0,\delta[$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty \iff$$
$$\forall\,c > 0\ \exists\,\delta > 0 \text{ mit } f(x) > c\,\forall\,x \in]-\delta,0[$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = a \iff$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = a \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = a$$
Anderenfalls existiert $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ nicht.

Der $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ wird auf einen Grenzwert mit $h\to 0$ zurückgeführt:

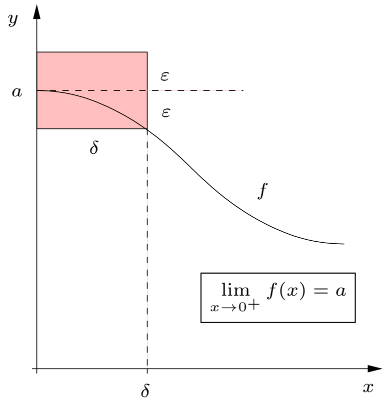
$$\boxed{\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{h\to 0^+} f(x_0+h)}$$

$$\boxed{\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{h\to 0^+} f(x_0-h)}$$

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{h\to 0} f(x_0+h)}$$

Für $\lim\limits_{x\to x_0}$ gelten die gleichen Rechenregeln wie für $\lim\limits_{x\to\infty}$ auf S.101.

Beispiele



Zur praktischen Grenzwertberechnung verwenden wir in Klammern stehende „Denkhilfen“:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{3^{\frac{1}{x}}+4}{3^{\frac{1}{x}}+2} = \left(\frac{3^{+\infty}+4}{3^{+\infty}+2}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1+4\cdot 3^{-\frac{1}{x}}}{1+2\cdot 3^{-\frac{1}{x}}} =$$
$$= \left(\frac{1+4\cdot 3^{-\infty}}{1+2\cdot 3^{-\infty}}\right) = \left(\frac{1+0}{1+0}\right) = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{3^{\frac{1}{x}}+4}{3^{\frac{1}{x}}+2} = \left(\frac{3^{-\infty}+4}{3^{-\infty}+2}\right) = \left(\frac{0+4}{0+2}\right) = 2$$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^{\frac{1}{x}}+4}{3^{\frac{1}{x}}+2}$ existiert nicht.

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x-1}{x-2} = \lim_{h\to 0^+} \frac{2+h-1}{2+h-2} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1+h}{h} =$$
$$= \left(\frac{1}{0^+}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x-1}{x-2} = \lim_{h\to 0^+} \frac{2-h-1}{2-h-2} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1-h}{-h} =$$
$$= \left(\frac{1}{0^-}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_1 \text{ und } \lim_{x\to x_0} g(x) = y_2 \implies$$
$$\lim_{x\to x_0} (af(x)+bg(x)) = ay_1 + by_2$$

Definitionen und Regeln

Gebrochen rationale Funktionen

Eine Funktion f mit dem Term

$$f(x) = \frac{z(x)}{n(x)},$$

wobei z und n Polynome sind, heißt *gebrochen rational*.
Die Nullstellen von f sind die Nullstellen des Zählerpolynoms z, an den Nullstellen des Nennerpolynoms n ist f nicht definiert.
Ist x_0 eine Nullstelle von n aber keine Nullstelle von z ($n(x_0) = 0$, $z(x_0) \neq 0$), dann gilt

$$\left|\lim_{x \to x_0^+} f(x)\right| = \infty \quad \text{und} \quad \left|\lim_{x \to x_0^-} f(x)\right| = \infty$$

Der Graf von f nähert sich an die Gerade $x = x_0$ an, die *senkrechte Asymptote* genannt wird. Ist $n(x_0) = 0$ und $z(x_0) = 0$, dann kann es bei x_0 auch eine senkrechte Asymptote geben, muss aber nicht.
Ist r der Grad des Zähler- und s der Grad des Nennerpolynoms, dann gilt

$$f(x) = \frac{a_r x^r + \ldots + a_1 x + a_0}{b_s x^s + \ldots + b_1 x + b_0}$$

mit $a_r \neq 0$ und $b_s \neq 0$. **Fall 1:** $r < s$:
Nach Kürzen durch x^s erhält man mit $m = s - r$

$$f(x) = \frac{\frac{a_r}{x^m} + \frac{a_{r-1}}{x^{m+1}} + \ldots + \frac{a_0}{x^s}}{b_s + \frac{b_{s-1}}{x} + \ldots + \frac{b_0}{x^s}}$$

und damit

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \left(\frac{0}{b_s}\right) = 0,$$

also die waagrechte Asymptote $y = 0$.

Fall 2: $r = s$:
Nach Kürzen durch x^s erhält man

$$f(x) = \frac{a_s + \frac{a_{s-1}}{x} + \ldots + \frac{a_0}{x^s}}{b_s + \frac{b_{s-1}}{x} + \ldots + \frac{b_0}{x^s}}$$

und damit

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{a_s}{b_s},$$

also die waagrechte Asymptote $y = \frac{a_s}{b_s}$.

Beispiele

Fall 3: $r > s$:
Polynomdivision:

$$f(x) = z(x) : n(x) = p(x) + \frac{q(x)}{n(x)}$$

mit Grad$(p) = r - s$ und Grad$(q) < s$. Wegen Grad$(q) < s$ ist $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{q(x)}{n(x)} = 0$, d.h.

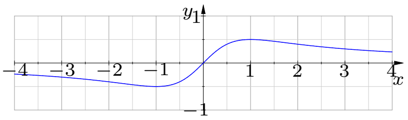
$$\lim_{x \to \pm\infty} |f(x) - p(x)| = \lim_{x \to \pm\infty} = \frac{q(x)}{n(x)} = 0$$

Für $x \to \pm\infty$ nähert sich der Graf von f also immer mehr an den Grafen von p an.
Für $x \to \pm\infty$ verhält sich f genau so wie das Polynom p.

$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$, $D_f = \mathbb{R}$, NS: $x_0 = 0$

$f(-x) = -f(x) \implies$ punktsymmetrisch zum Ursprung

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$, d.h. die x-Achse ist Asymptote



$$f(x) = \frac{5x + 3}{2x - 4} = \frac{5}{2} + \frac{6{,}5}{x - 2}$$

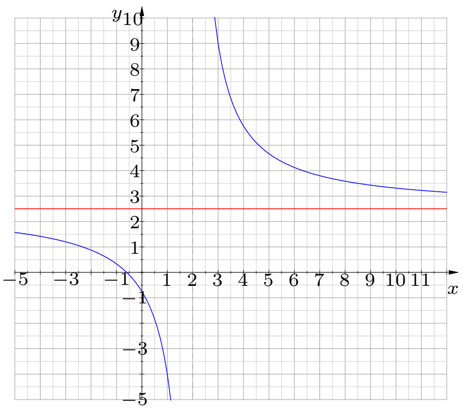
f ist die um 2 nach rechts und $\frac{5}{2}$ nach oben verschobene Funktion g mit $g(x) = \frac{6{,}5}{x}$, d.h. f ist punktsymmetrisch zum Punkt $(2|\frac{5}{2})$.

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, NS: $x_0 = -\frac{3}{5} = -0{,}6$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{5}{2} \implies$ waagr. Asymptote: $y = \frac{5}{2}$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

senkrechte Asymptote: $x = 2$



Definitionen und Regeln

Beispiel:

$$f(x) = \frac{x^2-4x+4}{x-3} = \frac{(x-2)^2}{x-3}$$

Polynomdivision:

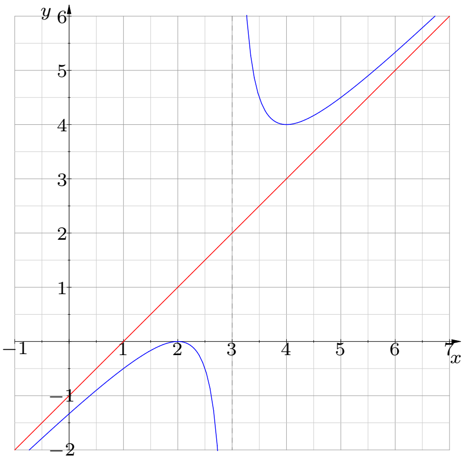
$$f(x) = x - 1 + \frac{1}{x-3}$$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$, NS: $x_0 = 2$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$

Schräge Asymptote: $y = p(x) = x - 1$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{h\to 0^+} f(3-h) =$$
$$= \lim_{h\to 0^+}\left(2 - h + \frac{1}{-h}\right) = \left(2 + \frac{1}{0^-}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{h\to 0^+} f(3+h) =$$
$$= \lim_{h\to 0^+}\left(2 + h + \frac{1}{h}\right) = \left(2 + \frac{1}{0^+}\right) = +\infty$$



Wir untersuchen noch, für welche x der Funktionswert $f(x)$ um weniger als ε ($\varepsilon > 0$) vom Funktionswert $p(x)$ der Asymptoten abweicht:

$$|f(x) - p(x)| < \varepsilon$$
$$\left|\frac{1}{x-3}\right| < \varepsilon$$
$$\frac{1}{\varepsilon} < |x-3|$$
$$x - 3 > \frac{1}{\varepsilon} \ \vee \ x - 3 < -\frac{1}{\varepsilon}$$
$$x > 3 + \frac{1}{\varepsilon} \ \vee \ x < 3 - \frac{1}{\varepsilon}$$

z.B. für $\varepsilon = 10^{-3}$:

$$x > 1003 \ \vee \ x < -997$$

Beispiele

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-4}$$

Polynomdivision:

$$f(x) = 1 + \frac{3}{(x-2)(x+2)}$$

$f(-x) = f(x) \quad \Longrightarrow \quad$ Symmetrie zur y-Achse

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$, NS: $x_{01} = -1$, $x_{02} = 1$

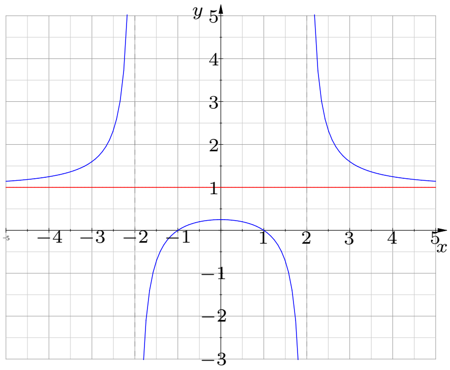
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$: Asymptote $y = 1$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{h\to 0^+} f(2-h) =$$
$$= 1 + \lim_{h\to 0^+} \frac{3}{(-h)(4-h)} = \left(1 + \frac{3}{0^-}\right) = -\infty$$

Analog: $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$

Aus der Symmetrie folgt:

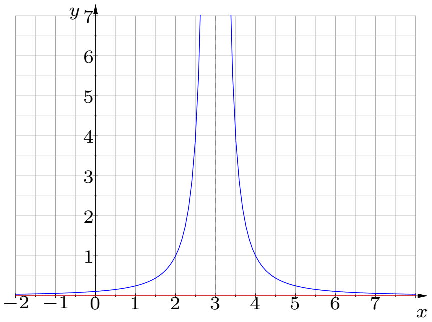
$\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x) = -\infty$



$f(x) = \dfrac{1}{(x-3)^2}$, $\quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$

$$\lim_{x\to 3^\pm} f(x) = \lim_{h\to 0^+} f(3\pm h) =$$
$$= \lim_{h\to 0^\pm} \frac{1}{(\pm h)^2} = \left(\frac{1}{0^+}\right) = +\infty$$



Definitionen und Regeln	**Beispiele**

Die Ableitung einer Funktion

Der Differenzenquotient

Zur Wiederholung:

$y = f(x)$		
x	:	unabhängige Veränderliche
x-Achse	:	Abszisse
y	:	abhängige Veränderliche
y-Achse	:	Ordinate

Die *Änderung* einer Funktion

$$f:\ y = f(x)$$

im Intervall $[a, b]$ ist

$$\Delta y = \Delta f = f(b) - f(a)$$

Die *mittlere Änderungsrate* der Funktion f im Intervall $[a, b]$ ist

$$m_{[a,b]} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$m_{[a,b]}$ heißt auch *Differenzenquotient.*
Eine Gerade, die den Grafen von f in mindestens zwei Punkten schneidet, nennt man eine *Sekante.*
Die mittlere Änderungsrate $m_{[a,b]}$ ist die Steigung der Sekante AB mit A$(a|f(a))$ und B$(b|f(b))$.
Das Wort *Rate* deutet auf ein Verhältnis hin. So ist z.B. die Geburtenrate das Verhältnis von Neugeborenen zur Gesamtbevölkerung. Die Änderungsrate ist das Verhältnis der Änderung Δy der Funktion zur Änderung Δx der unabhängigen Variablen.

Beispiele:

Beschreibt $s(t)$ den Ort eines Körpers in Abhängigkeit von der Zeit t, dann ist die mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall $[t_1, t_2]$:

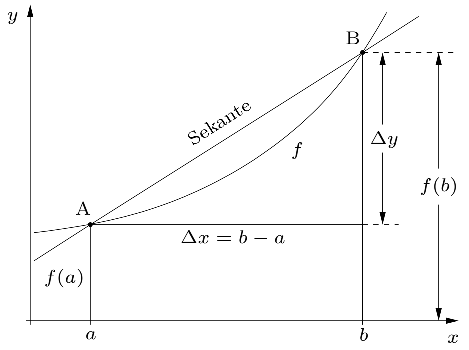
$$\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Ist $v(t)$ die Geschwindigkeit eines Körpers zur Zeit t, dann ist die mittlere Beschleunigung im Zeitintervall $[t_1, t_2]$:

$$\overline{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Beschreibt $N(t)$ die Zahl der Atome eines radioaktiven Elements mit der Halbwertszeit T, dann ist die mittlere Änderungsrate im Intervall $[t, t + T]$

$$m = \frac{N(t+T) - N(t)}{T} = \frac{\frac{N(t)}{2} - N(t)}{T} = -\frac{N(t)}{2T}$$



Beispiel:

Die mittlere Änderungsrate der Funktion f mit der Gleichung $f(x) = ax^2$ im Intervall $[x-h, x+h]$ ist

$$\begin{aligned} m &= \frac{f(x+h) - f(x-h)}{(x+h) - (x-h)} = \\ &= \frac{a(x+h)^2 - a(x-h)^2}{2h} = \\ &= \frac{a\left[x^2 + 2xh + h^2 - (x^2 - 2xh + h^2)\right]}{2h} = \\ &= \frac{4axh}{2h} = 2ax \end{aligned}$$

Zinssatz und Änderungsrate:

$f(t)$ ist das Geld auf einem Konto bei einem jährlichen Zinssatz p. Mit $a_0 = f(0)$, $q = 1 + p$ und $T = 1\,\mathrm{a}$ gilt

$$f(t) = a_0 q^{\frac{t}{T}}$$

$$f(t + \Delta t) = a_0 q^{\frac{t+\Delta t}{T}} = a_0 q^{\frac{t}{T}} q^{\frac{\Delta t}{T}} = f(t) \cdot q^{\frac{\Delta t}{T}}$$

Die Änderung von f im Intervall $[t, t + \Delta t]$ ist

$$\Delta f = f(t + \Delta t) - f(t) = f(t)\left(q^{\frac{\Delta t}{T}} - 1\right)$$

Die mittlere zeitliche Änderungsrate von f im Intervall $[t, t + \Delta t]$ ist

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = f(t)\frac{q^{\frac{\Delta t}{T}} - 1}{\Delta t}$$

Die Änderungsrate von f pro Zeit Δt *und* pro Kontostand $f(t)$ ist

$$\frac{\Delta f}{f(t)\Delta t} = \frac{q^{\frac{\Delta t}{T}} - 1}{\Delta t}$$

Spezialfall: $\Delta t = T \quad \Longrightarrow$

$$\frac{\Delta f}{f(t)T} = \frac{p}{T},\ \text{z.B. } \frac{3\%}{\mathrm{a}}$$

Definitionen und Regeln

Definition der Ableitung

Wir betrachten die mittlere Änderungsrate einer Funktion f auf dem Intervall $[x, x+h]$:

$$m_h = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Verkleinert man h, dann wandert der Punkt $\mathrm{Q}(x+h|f(x+h))$ auf dem Grafen von f immer näher an den Punkt $\mathrm{P}(x|f(x))$ heran. Im Grenzfall $h \to 0$ geht die Sekante PQ in die Tangente t an G_f im Punkt P über. Die Steigung der Tangente ist dann

$$m_t = \lim_{h\to 0} m_h$$

Existiert dieser Grenzwert, dann nennt man m_t

- die Steigung oder
- die *Ableitung nach x* oder
- den *Differentialquotienten*

der Funktion f an der Stelle x. f ist dann an der Stelle x *differenzierbar*.
Schreibweise:

$$\boxed{f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

Ist $D_{f'}$ die Menge aller $x \in D_f$, für die f differenzierbar ist, dann ist

$$f' = \{(x|f'(x)) \mid x \in D_{f'}\}$$

eine Funktion, die *Ableitungsfunktion* von f.

---

t ist jetzt die Tangente an G_f im Punkt $(x_0|f(x_0))$. Für den Steigungswinkel φ der Tangente gilt

$$\boxed{\tan\varphi = m_t = f'(x_0)}$$

Die Gleichung von t erhält man aus

$$m_t = f'(x_0) = \frac{t(x) - t(x_0)}{x - x_0}$$

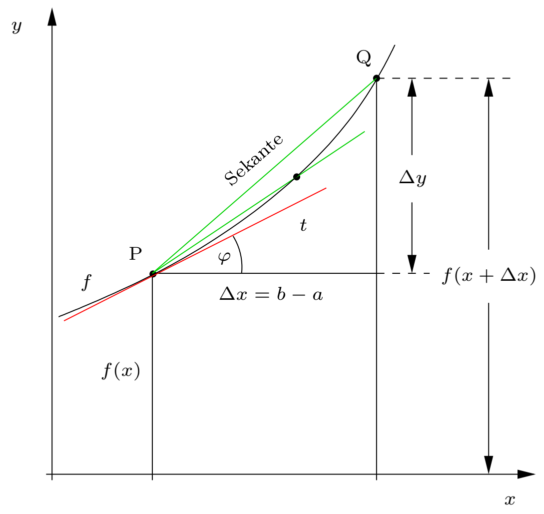
Wegen $t(x_0) = f(x_0)$ folgt

$$\boxed{t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$

Die unabhängige Variable einer Funktion muss nicht x heißen, z.B.

$$k(s) = s^2 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}k(s)}{\mathrm{d}s} = 2s$$

Beispiele



Beispiele (a ist eine Konstante):

$$f(x) = a \quad\Longrightarrow\quad f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{a-a}{h} = 0$$

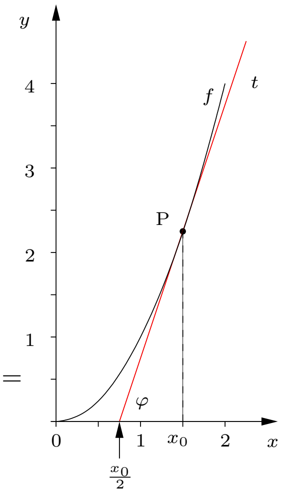
$$f(x) = ax + b \quad\Longrightarrow$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{a(x+h) + b - (ax+b)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{ah}{h} = a$$

Wie zu erwarten, ist die Steigung der linearen Funktion einfach a.

$$f(x) = x^2 \quad\Longrightarrow$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2xh + h^2}{h} = \\ = \lim_{h\to 0}(2x + h) = 2x$$



Aus

$$f(x_0) = x_0^2$$

und

$$f'(x_0) = 2x_0$$

folgt für die Gleichung der Tangente an G_f im Punkt $\mathrm{P}(x_0|x_0^2)$:

$$t(x) = x_0^2 + 2x_0(x - x_0) = \\ = 2x_0x - x_0^2$$

Die Nullstelle von t ist $\frac{x_0}{2}$. Damit hat man eine einfache Möglichkeit zur Konstruktion von t (Nullstelle und Berührpunkt).

Definitionen und Regeln

t ist die Tangente an G_f im Punkt $\mathrm{P}(x|f(x))$. Die *Normale* n auf G_f im Punkt P ist das Lot auf t in P. In nebenstehender Abbildung hat das Steigungsdreieck von t die Katheten Δx und Δy. Das Steigungsdreieck von n hat die waagrechte Kathete $\Delta x' = \Delta y$. Aus

$$\beta' = 90° - \alpha = \beta$$

folgt die Kongruenz der beiden Dreiecke (wsw) und daraus $\Delta y' = -\Delta x$. Mit der Steigung

$$m_t = f'(x_0)$$

der Tangente folgt für die Steigung der Normalen

$$m_n = \frac{\Delta y'}{\Delta x'} = \frac{-\Delta x}{\Delta y} = -\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

oder

$$\boxed{m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{f'(x_0)}}$$

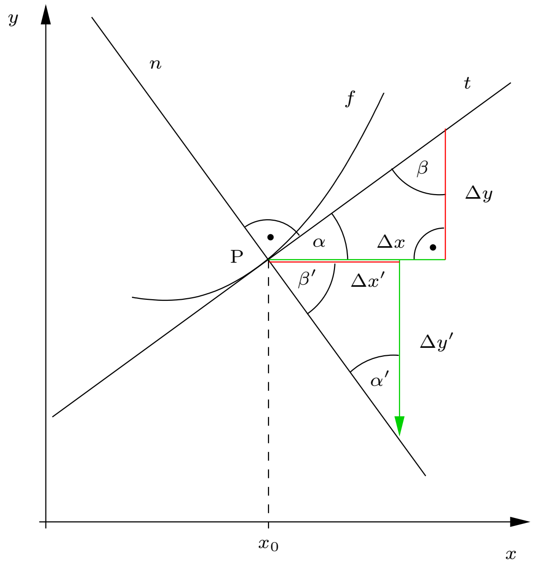
Die Gleichung von n erhält man aus

$$m_n = -\frac{1}{f'(x_0)} = \frac{n(x) - n(x_0)}{x - x_0}$$

Wegen $n(x_0) = f(x_0)$ folgt

$$\boxed{n(x) = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)}$$

Beispiele



Beispiel: Die Normale auf die Normalparabel im Punkt $\mathrm{P}\big(x_0|x_0^2\big)$ hat die Gleichung

$$n(x) = x_0^2 - \frac{1}{2x_0}(x - x_0) = -\frac{1}{2x_0}x + x_0^2 + \frac{1}{2}$$

Die Normale durch P(1|1):

$$n(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

Ableitungsregeln

$f(x) = \dfrac{1}{x} \quad \Longrightarrow$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x - (x+h)}{x(x+h)h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{x(x+h)h} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{x} = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}}$$

$f(x) = u(x) + v(x) \quad \Longrightarrow$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) + v(x+h) - [u(x) + v(x)]}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) - u(x) + v(x+h) - v(x)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} =$$
$$= u'(x) + v'(x) \quad \text{(Summenregel)}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u(x) + v(x)) = (u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x)}$$

$f(x) = \sqrt{x} \quad \Longrightarrow$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{x + h - x}{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{x} = \big(\sqrt{x}\big)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

$f(x) = a \cdot u(x) \quad \Longrightarrow$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{au(x+h) - au(x)}{h} =$$
$$= a \cdot \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = a \cdot u'(x)$$

(Faktorregel)

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a \cdot u(x)) = (a \cdot u(x))' = a \cdot u'(x)}$$

Definitionen und Regeln | **Beispiele**

Die Ableitung von x^n $(n \in \mathbb{N})$

Aus nebenstehender Formel folgt mit $\frac{h}{x} = \varepsilon$:

$$(x+h)^n = \left[x\left(1+\frac{h}{x}\right)\right]^n = x^n\left(1+\frac{h}{x}\right)^n =$$
$$= x^n\left(1 + n\cdot\frac{h}{x} + \frac{h^2}{x^2}p_{n-2}\right) =$$
$$= x^n + nhx^{n-1} + h^2x^{n-2}p_{n-2}$$

Damit folgt für die Ableitung von $f(x) = x^n$:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{nhx^{n-1} + h^2x^{n-2}p_{n-2}}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\left[nx^{n-1} + hx^{n-2}p_{n-2}\right] = nx^{n-1}$$

$$\boxed{(x^n)' = nx^{n-1}} \text{ für } n \in \mathbb{N}$$

Beispiele:

$$\left(x^3\right)' = 3x^2, \quad \left(x^7\right)' = 7x^6, \quad \left(\frac{1}{5}x^{10}\right)' = 2x^9$$

$$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 \implies$$
$$p'(x) = na_nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_1$$

p_n bezeichnet ein Polynom vom Grad n in ε:

$$p_n = a_n\varepsilon^n + \ldots + a_1\varepsilon + a_0$$

$$(1+\varepsilon)^2 = 1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2 = 1 + 2\cdot\varepsilon + \varepsilon^2p_0$$
$$(1+\varepsilon)^3 = 1 + 3\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \varepsilon^3 = 1 + 3\varepsilon + \varepsilon^2(3+\varepsilon) =$$
$$= 1 + 3\cdot\varepsilon + \varepsilon^2p_1$$
$$(1+\varepsilon)^4 = (1+\varepsilon^3)(1+\varepsilon) =$$
$$= (1 + 3\varepsilon + \varepsilon^2p_1)(1+\varepsilon) =$$
$$= 1 + 3\varepsilon + \varepsilon^2p_1 + \varepsilon + 3\varepsilon^2 + \varepsilon^3p_1 =$$
$$= 1 + 4\varepsilon + \varepsilon^2\underbrace{(p_1 + 3 + \varepsilon p_1)}_{p_2} =$$
$$= 1 + 4\varepsilon + \varepsilon^2p_2$$

Bei jeder Multiplikation mit $(1+\varepsilon)$ wird der Koeffizient von ε um eins größer und der Grad des Polynoms erhöht sich um eins:

$$\boxed{(1+\varepsilon)^n = 1 + n\cdot\varepsilon + \varepsilon^2p_{n-2}}$$

Die Formel $(x^n)' = nx^{n-1}$ gilt auch für $n = 0$ und $n = \frac{1}{2}$, denn:

$$\left(x^0\right)' = (1)' = 0 = 0\cdot x^{0-1}$$
$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}$$

Die Ableitung von $\sin x$ und $\cos x$

Mit der Formel

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

folgt mit $\alpha = x + h$ und $\beta = x$

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\frac{2x+h}{2}\sin\frac{h}{2}}{h} =$$
$$= \underbrace{\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}_{\cos x}\cdot\underbrace{\lim_{\frac{h}{2}\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}}_{1} = \cos x$$

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x}$$

Da $\cos x$ die um $\frac{\pi}{2}$ nach links verschobene Funktion $\sin x$ ist, ist auch $(\cos x)'$ die um $\frac{\pi}{2}$ nach links verschobene Funktion $(\sin x)' = \cos x$ und das ist $-\sin x$:

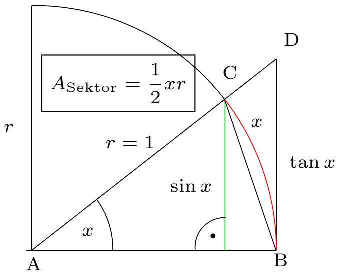
$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$$

Der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$

$$A_{\triangle\text{ABC}} = \frac{1}{2}\sin x$$
$$A_{\text{Sektor}} = \frac{x}{2}$$
$$A_{\triangle\text{ABD}} = \frac{1}{2}\tan x$$

Flächenvergleich:

(„=“ für $x = 0$)



$$2A_{\triangle\text{ABC}} \leqq 2A_{\text{Sektor}} \leqq 2A_{\triangle\text{ABD}} \implies$$

$$\sin x \leqq x \leqq \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \implies$$

$$\cos x \leqq \frac{\sin x}{x} \leqq 1 \quad \text{für } 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

Gilt wegen der Achsensymmetrie von $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ auch für $-\frac{\pi}{2} < x < 0$.

$$\implies \underbrace{\lim_{x\to 0}\cos x}_{1} \leqq \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \leqq 1$$

$$\implies \boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1}$$

Definitionen und Regeln | **Beispiele**

Die Produktregel

Wir betrachten $f(x) = u(x)v(x)$. Aus

$$\begin{aligned} &u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x) = \\ &\quad = u(x+h)v(x+h) - u(x+h)v(x) + \\ &\qquad + u(x+h)v(x) - u(x)v(x) = \\ &\qquad = u(x+h)\left[v(x+h) - v(x)\right] + \\ &\qquad\qquad + \left[u(x+h) - u(x)\right]v(x) \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)\left[v(x+h) - v(x)\right]}{h} + \\ &\quad + \lim_{h\to 0} \frac{\left[u(x+h) - u(x)\right]v(x)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} u(x+h) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} + \\ &\quad + \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \cdot v(x) = \\ &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \quad \text{(Produktregel)} \end{aligned}$$

$$\boxed{[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)}$$

$$\begin{aligned} \left(x^{\frac{3}{2}}\right)' &= (x\sqrt{x})' = x'\sqrt{x} + x(\sqrt{x})' = \\ &= \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' &= \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \left(\frac{\sqrt{x}}{x}\right)' = \left(\sqrt{x} \cdot \frac{1}{x}\right)' = \\ &= \left(\sqrt{x}\right)' \cdot \frac{1}{x} + \sqrt{x} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{x} + \sqrt{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \\ &= \frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{1}{x\sqrt{x}} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x - \sqrt{x}\right)\left(x^3 - \frac{1}{x}\right) \\ f'(x) &= \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\left(x^3 - \frac{1}{x}\right) + \\ &\qquad + \left(x - \sqrt{x}\right)\left(3x^2 \frac{1}{x^2}\right) = \\ &= 4x^3 - \frac{7}{2}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Die Quotientenregel

Wir betrachten $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$. Aus

$$\begin{aligned} &\frac{u(x+h)}{v(x+h)} - \frac{u(x)}{v(x)} = \\ &\quad = \frac{u(x+h)v(x) - u(x)v(x+h)}{v(x+h)v(x)} = \\ &\qquad = \frac{[u(x+h) - u(x)]v(x)}{v(x+h)v(x)} - \\ &\qquad\qquad - \frac{u(x)[v(x+h) - v(x)]}{v(x+h)v(x)} \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{u(x+h)}{v(x+h)} - \frac{u(x)}{v(x)}\right] = \\ &= \frac{v(x)}{v(x)^2} \lim_{h\to 0}\left[\frac{u(x+h) - u(x)}{h}\right] - \\ &\quad - \frac{u(x)}{v(x)^2} \lim_{h\to 0}\left[\frac{v(x+h) - v(x)}{h}\right] = \\ &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} \quad \text{(Quotientenregel)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}}$$

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \frac{(1)' \cdot f(x) - 1 \cdot f'(x)}{f(x)^2} =$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}}$$

$$\begin{aligned} \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' &= \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = -\frac{(\sqrt{x})'}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = \\ &= -\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^2 - 1}{x+2}\right)' &= \frac{(x+2)(x^2-1)' - (x^2-1)(x+2)'}{(x+2)^2} = \\ &= \frac{(x+2) \cdot 2x - (x^2-1) \cdot 1}{(x+2)^2} = \\ &= \frac{x^2 + 4x + 1}{(x+2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x(\sin x)' - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

Definitionen und Regeln

Die Kettenregel

Wir betrachten die verkettete Funktion (siehe rechts)

$$f : x \to f(x) = u \circ v(x) = u(v(x))$$

Ihre Ableitung ist

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{u(v(x+h))-u(v(x))}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \left[\frac{u(v(x+h))-u(v(x))}{v(x+h)-v(x)} \cdot \frac{v(x+h)-v(x)}{h} \right] \end{aligned}$$

Mit

$$v(x+h)-v(x) = \varepsilon \text{ und } y = v(x)$$

gilt

$$v(x+h) = y + \varepsilon$$

und aus $h \to 0$ folgt auch $\varepsilon \to 0$. Damit ist

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{u(y+\varepsilon)-u(y)}{\varepsilon} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{v(x+h)-v(x)}{h} = \\ &= u'(y) \cdot v'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x) \end{aligned}$$

$$\boxed{[u(v(x))]' = u'(v(x)) \cdot v'(x)}$$

(Kettenregel)

oder

$$\boxed{(u \circ v)' = (u' \circ v) \cdot v'}$$

Die Multiplikation mit $v'(x)$ nennt man auch *Nachdifferenzieren.*

Beispiele:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin\left(x^2\right) = u(v(x)) \\ &\quad \text{mit } u(x) = \sin x \text{ und } v(x) = x^2 \\ &\quad u'(x) = \cos x \text{ und } v'(x) = 2x \\ f'(x) &= u'(v(x)) \cdot v'(x) = \\ &= \cos\left(x^2\right) \cdot 2x = 2x \cos\left(x^2\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin^2 x = (\sin x)^2 = u(v(x)) \\ &\quad \text{mit } u(x) = x^2 \text{ und } v(x) = \sin x \\ &\quad u'(x) = 2x \text{ und } v'(x) = \cos x \\ f'(x) &= u'(v(x)) \cdot v'(x) = \\ &= 2 \cdot v(x) \cdot v'(x) = 2 \sin x \cos x \end{aligned}$$

Beispiele

Verkettung von Funktionen

Verkettung (Hintereinanderausführung) von zwei Funktionen:

$$f = g \circ h \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = g(h(x))$$

Beispiel: $g(x) = x^2$, $h(x) = 2 - x$

$$\begin{aligned} f_1 &= g \circ h \\ f_1(x) &= g(h(x)) = [h(x)]^2 = (2-x)^2 \\ f_2 &= h \circ g \\ f_2(x) &= h(g(x)) = 2 - g(x) = 2 - x^2 \end{aligned}$$

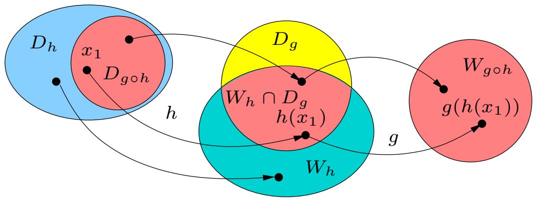
Man sieht, dass im Allgemeinen

$$g \circ h \neq h \circ g$$

gilt ($\circ$ ist nichtkommutativ).

Hat g eine eingeschränkte Definitionsmenge, wirkt sich das auch auf die Definitionsmenge von $f = g \circ h$ aus:

$$D_f = D_{g\circ h} = \{x \in D_h \,|\, h(x) \in D_g\}$$



Beispiel: $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $h(x) = \lg x$

$$f = g \circ h \quad \Longrightarrow \quad f(x) = \sqrt{4 - (\lg x)^2}$$

$$\begin{aligned} D_g &= [-2; 2], & W_g &= [0; 2] \\ D_h &= \mathbb{R}^+, & W_g &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(x) \in D_g \quad &\Longrightarrow \quad \lg x \in [-2; 2] \\ D_f &= \left[10^{-2}; 10^2\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 3)^5 = u(v(x)) \\ &\quad \text{mit } u(x) = x^5 \text{ und } v(x) = x^2 - 3 \\ &\quad u'(x) = 5x^4 \text{ und } v'(x) = 2x \\ f'(x) &= u'(v(x)) \cdot v'(x) = \\ &= 5v(x)^4 \cdot 2x = 10x(x^2-3)^4 \end{aligned}$$

Definitionen und Regeln

Die Ableitung von x^q, $q \in \mathbb{Q}$

Wir betrachten zunächst die Funktion f mit

$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Mit der Quotientenregel folgt

$$f'(x) = -\frac{(x^n)'}{(x^n)^2} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}$$

Aus

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \ \underbrace{(x^0)'}_{0} = \underbrace{0 \cdot x^{0-1}}_{0}, \ (x^{-n})' = -nx^{-n-1}$$

folgt dann

$$\boxed{(x^z)' = zx^{z-1} \quad \text{für} \quad z \in \mathbb{Z}}$$

Jetzt wenden wir uns der Funktion f mit

$$f(x) = x^q, \quad q \in \mathbb{Q}$$

zu. $q \in \mathbb{Q}$ bedeutet

$$q = \frac{m}{n} \text{ mit } m \in \mathbb{Z} \text{ und } n \in \mathbb{Z}$$

also

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{\frac{m}{n}} \quad \Longrightarrow \\ [f(x)]^n &= x^{\frac{m}{n} \cdot n} = x^m \end{aligned}$$

Beide Seiten unter Beachtung der Kettenregel differenzieren:

$$\begin{aligned} n\,[f(x)]^{n-1} \cdot f'(x) &= mx^{m-1} \\ nx^{\frac{m}{n}(n-1)} \cdot f'(x) &= mx^{m-1} \\ nx^m x^{-\frac{m}{n}} \cdot f'(x) &= mx^m x^{-1} \\ f'(x) &= \frac{m}{n}\, x^{\frac{m}{n}-1} = qx^{q-1} \end{aligned}$$

Also gilt

$$\boxed{(x^q)' = qx^{q-1} \quad \text{für} \quad q \in \mathbb{Q}}$$

Durch geeignete Grenzwertbetrachtungen kann man zeigen, dass sogar

$$\boxed{(x^r)' = rx^{r-1} \quad \text{für} \quad r \in \mathbb{R}}$$

gilt.

$$\left(x^{\frac{7}{3}}\right)' = \frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^7}}\right)' = \left(x^{-\frac{7}{3}}\right)' = -\frac{7}{3}x^{-\frac{10}{3}}$$

Beispiele

Zusammenfassung der Ableitungsregeln

$$\begin{aligned} [u(x) + v(x)]' &= u'(x) + v'(x) \quad \text{(Summenregel)} \\ [a \cdot u(x)]' &= a \cdot u'(x) \quad \text{(Faktorregel)} \\ [u(x)v(x)]' &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ & \qquad \text{(Produktregel)} \\ \left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} \\ & \qquad \text{(Quotientenregel)} \\ [u(v(x))]' &= u'(v(x)) \cdot v'(x) \\ & \qquad \text{(Kettenregel)} \\ [x^r]' &= rx^{r-1} \quad \text{für} \quad r \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Spezialfälle:} \quad & (a)' = 0 \quad (x)' = 1 \\ & \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \\ & (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ & [\sin x]' = \cos x \\ & [\cos x]' = -\sin x \end{aligned}$$

Beispiele zu den Ableitungsregeln

Summen- und Faktorregel:

$$\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)' = 2x - \frac{1}{x^2}$$

$$(3x^2)' = 3 \cdot 2x = 6x$$

Produktregel:

$$(\sin x \cos x)' = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$(x^\pi \sin x)' = \pi x^{\pi-1} \sin x + x^\pi \cos x$$

Quotientenregel:

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$$

Kettenregel:

$$(\sin ax)' = a \cos ax$$

$$\left(x^2 \sin \frac{1}{x}\right)' = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

$$\left(\sqrt{1 - x^2}\right)' = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Mehrfache Anwendung der Kettenregel:

$$\left(\sqrt{\sin(x^2)}\right)' = \frac{\left(\sin(x^2)\right)'}{2\sqrt{\sin(x^2)}} = \frac{x \cos(x^2)}{\sqrt{\sin(x^2)}}$$

Definitionen und Regeln | **Beispiele**

Höhere Ableitungen

Die Ableitung der Ableitung heißt zweite Ableitung:

$$f''(x) = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} = \left[f'(x)\right]'$$

Die Ableitung der zweiten Ableitung ist dann die dritte Ableitung usw. Für die n-te Ableitung schreibt man

$$f^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$$

(man spricht „f n-Strich von x“).

$$\begin{aligned} f(x) &= x^n \\ f'(x) &= nx^{n-1} \\ f''(x) &= n(n-1)x^{n-2} \\ f'''(x) &= n(n-1)(n-2)x^{n-3} \\ f^{(n)}(x) &= n! \\ f^{(m)}(x) &= 0 \quad \text{für} \quad m > n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x \\ f'(x) &= \cos x \\ f''(x) &= -\sin x \\ f'''(x) &= -\cos x \\ f^{(4)}(x) &= \sin x \end{aligned}$$

Die Ableitung in der Physik

Ableitungen nach der Zeit t werden mit einem Punkt statt mit einem Strich bezeichnet, z.B. die Geschwindigkeit v als Ableitung des Weges $s(t)$ nach der Zeit:

$$v(t) = \dot{s}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

Analog die Beschleunigung:

$$a(t) = \dot{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

Die Beschleunigung ist die zweite Ableitung des Weges nach der Zeit:

$$a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t)$$

Aus

$$s(t) = \frac{b}{2}\, t^2 + v_0 t + s_0$$

folgt

$$v(t) = \dot{s}(t) = bt + v_0$$

und

$$a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t) = b$$

(Bewegung mit konstanter Beschleunigung)

$$\begin{aligned} x(t) &= A \sin(\omega t + \varphi) \\ v(t) = \dot{x}(t) &= A\omega \cos(\omega t + \varphi) \\ a(t) = \dot{v}(t) &= -\omega^2 A\omega \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x(t) \end{aligned}$$

(Harmonische Schwingung)

Differenzierbarkeit

f ist an der Stelle x differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

existiert. Das bedeutet, dass die beiden einseitigen Grenzwerte (*linksseitige* und *rechtsseitige* Ableitung)

$$f'_-(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

und

$$f'_+(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x - h) - f(x)}{-h}$$

existieren und gleich sind.

Die Funktion f mit (siehe S.99)

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geqq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

ist an der Stelle $x_0 = 0$ nicht differenzierbar, da

$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{|0 + h| - 0}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

und

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{|0 - h| - 0}{-h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{-h} = -1$$

ist. Wegen $f'_-(0) \neq f'_+(0)$ hat f bei $x_0 = 0$ eine *Spitze*.

Definitionen und Regeln

Stetige Funktionen

Eine Funktion f heißt *stetig* in x_0, wenn

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Ohne Beweis die für uns wichtigsten Eigenschaften stetiger Funktionen:

Eine stetige Funktion f macht keine Sprünge, d.h. man kann den Grafen von f zeichnen, ohne den Stift abzusetzen.

Liegt y_0 zwischen $f(a)$ und $f(b)$ (f stetig), d.h.

$$f(a) < y_0 < f(b) \text{ oder } f(a) > y_0 > f(b),$$

dann gibt es ein $x_0 \in]a, b[$ mit $f(x_0) = y_0$.

(**Zwischenwertsatz**)

Ein Spezialfall des Zwischenwertsatzes:

Haben $f(a)$ und $f(b)$ einer stetigen Funktion f verschiedene Vorzeichen, dann gibt es ein $x_0 \in]a, b[$ mit $f(x_0) = 0$.

(**Nullstellensatz**)

Eine stetige Funktion f kann nur bei einer Nullstelle ihr Vorzeichen wechseln.
Zwischen zwei benachbarten Nullstellen hat f also überall das gleiche Vorzeichen.

An einer Nullstelle muss die Funktion aber keinen VZW (Vorzeichenwechsel) haben, z.B. $f(x) = x^2$.

Beispiele

Im ganzen Definitionsbereich stetige Funktionen:

- Polynome
- Potentzfunktion x^a mit $a > 0$, z.B. $\sqrt{x}$
- $\sin x$, $\cos x$
- Exponentialfunktion a^x $(a > 0)$

Zwischen ihren Polen sind auch gebrochen-rationale Funktionen und $\tan x$ stetig.

$|x|$ ist überall stetig, $\operatorname{sgn} x$ ist bei $x_0 = 0$ nicht stetig.

Es gibt sogar Funtionen, die in ganz $\mathbb{R}$ definiert, aber nirgends stetig sind, z.B.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \text{ rational} \\ 0 & \text{für } x \text{ irrational} \end{cases}$$

Vorzeichenbestimmung bei einer Funktion f mit $D_f = [a, b]$:

- Nullstellen $x_{01}, \ldots, x_{0n}$ berechnen
- In jedem der Intervalle $]a, x_{01}[$, $]x_{01}, x_{02}[$, ..., $]x_{0n}, b[$ einen Funktionswert berechnen, dessen Vorzeichen dann das Vorzeichen *aller* Funktionswerte in diesem Intervall ist.

Beispiel: $f(x) = x^2 - x - 2$

Nullstellen: $x_{01} = -1$, $x_{02} = 2$

$$\begin{aligned} f(-2) = 4 &\implies f(x) > 0 \text{ für } x \in]-\infty, -1[\\ f(0) = -2 &\implies f(x) < 0 \text{ für } x \in]-1, 2[\\ f(3) = 4 &\implies f(x) > 0 \text{ für } x \in]2, \infty[\end{aligned}$$

x	$-\infty$		-1		2		∞
$f(x)$		$+$		$-$		$+$	
$\operatorname{sgn}(f(x))$		1		-1		1	

Die Ableitung von Betragsfunktionen

Wir betrachten die Betragsfunktion (siehe S.99):

$$f(x) = |x| = x \cdot \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -x & \text{für } x < 0 \\ x & \text{für } x \geqq 0 \end{cases}$$

$$|x|' = \begin{cases} \operatorname{sgn}(x) & \text{für } x \neq 0 \\ \text{nicht definiert} & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

oder kürzer

$$\boxed{|x|' = \operatorname{sgn}(x) \quad \text{für } x \neq 0}$$

Mit der Kettenregel folgt:

$$\boxed{|f(x)|' = \operatorname{sgn}(f(x)) \cdot f'(x) \quad \text{für } f(x) \neq 0}$$

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

$$\operatorname{sgn}'(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq 0 \\ \text{nicht definiert} & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Beispiel: $f(x) = |x^2 - x - 2|$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \operatorname{sgn}(x^2 - x - 2) \cdot (2x - 1) = \\ &= \begin{cases} 2x - 1 & \text{für } x < -1 \land x > 2 \\ 1 - 2x & \text{für } -1 < x < 2 \end{cases} \end{aligned}$$

$f'_-(-1) = -3$, $f'_+(-1) = 3$, $f'_-(2) = -3$, $f'_+(2) = 3$

Definitionen und Regeln

Näherungsweise Berechnung der Ableitung

Aus der Definition der Ableitung

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

folgt

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \text{für } |h| \text{ klein}$$

(*rechtsseitiger Differenzenquotient*).

Genauso gilt

$$f'(x) \approx \frac{f(x)-f(x-h)}{h} \quad \text{für } |h| \text{ klein}$$

(*linksseitiger Differenzenquotient*).

Eine bessere Näherung ist der Mittelwert aus dem rechts- und linksseitigen Differenzenquotienten:

$$\boxed{f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} \quad \text{für } |h| \text{ klein}}$$

(*beidseitiger Differenzenquotient*).

Der relative Fehler der einseitigen Differenzenquotienten ist proportional zu h, der relative Fehler des beidseitigen Differenzenquotienten ist proportional zu h^2.

Die lineare Näherung

Aus der Näherungsformel

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \text{für } |h| \text{ klein}$$

folgt die *lineare Näherung*:

$$\boxed{f(x_0+h) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot h \quad \text{für } |h| \text{ klein}}$$

Beispiel: $f(x) = \sqrt{x}$ und $x_0 = 1$:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \Longrightarrow \quad f'(1) = \frac{1}{2}$$

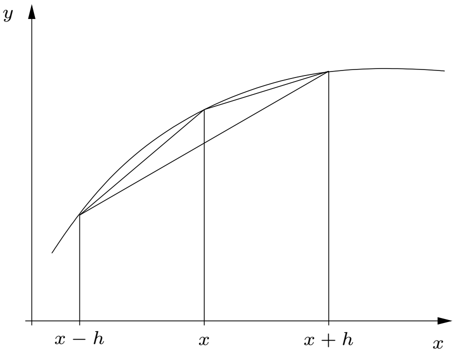
$$f(1+h) \approx f(1) + f'(1)h = 1 + \frac{1}{2}\cdot h$$

$$\boxed{\sqrt{1+h} \approx 1 + \frac{h}{2} \quad \text{für } |h| \ll 1}$$

h	$\sqrt{1+h}$	$1+\frac{h}{2}$	δ_{rel}
0,1	1,048808848	1,05	$1{,}14\cdot 10^{-3}$
0,01	1,004987562	1,005	$1{,}24\cdot 10^{-5}$
0,001	1,000499875	1,0005	$1{,}25\cdot 10^{-7}$

Der relative Fehler bei der linearen Näherung ist proportional zu h^2, in unserem Beispiel gilt näherungsweise $\delta_{\text{rel}} \approx 0{,}125\cdot h^2$.

Beispiele



Beispiel: $f(x) = 2^x$, $f'(1) = 1{,}386294361$

h	0,1	0,001
$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$	1,435469251	1,386774925
δ_{rel}	$3{,}5\cdot 10^{-2}$	$3{,}5\cdot 10^{-4}$
$\frac{f(1)-f(1-h)}{h}$	1,339340169	1,385814019
δ_{rel}	$-3{,}5\cdot 10^{-2}$	$-3{,}5\cdot 10^{-4}$
$\frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h}$	1,38740471	1,386294472
δ_{rel}	$8{,}0\cdot 10^{-4}$	$8{,}0\cdot 10^{-8}$

Weitere Beispiele für lineare Näherungsformeln:

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ und $x_0 = 1$:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \Longrightarrow \quad f'(1) = -1$$

$$f(1+h) \approx f(1) + f'(1)h = 1 - 1\cdot h$$

$$\boxed{\frac{1}{1+h} \approx 1 - h \quad \text{für } |h| \ll 1}$$

$f(x) = x^n$ und $x_0 = 1$:

$$f'(x) = nx^{n-1} \quad \Longrightarrow \quad f'(1) = n$$

$$f(1+h) \approx f(1) + f'(1)h = 1 + n\cdot h$$

$$\boxed{(1+h)^n \approx 1 + nh \quad \text{für } |h| \ll 1}$$

$f(x) = \sin x$ und $x_0 = 0$:

$$f'(x) = \cos x \quad \Longrightarrow \quad f'(0) = 1$$

$$f(1+h) \approx f(1) + f'(1)h = 0 + 1\cdot h$$

$$\boxed{\sin h \approx h \quad \text{für } |h| \ll 1}$$

Genauso zeigt man (Aufgabe!):

$$\boxed{\tan h \approx h \quad \text{für } |h| \ll 1}$$

Definitionen und Regeln

Die Taylor-Reihe

f sei eine in einer Umgebung von 0 definierte und unendlich oft differenzierbare Funktion. Als Näherung für $f(x)$ suchen wir ein Polynom

$$P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n,$$

dessen Funktionswert und dessen erste n Ableitungen an der Stelle $x=0$ mit den entsprechenden Werten von f übereinstimmen:

$$P_n(0)=f(0),\quad P_n'(0)=f'(0),$$
$$P_n''(0)=f''(0),\quad \dots\quad ,P_n^{(n)}(0)=f^{(n)}(0)$$

$$\begin{array}{rcl}
P_n(0)=a_0=f(0) & \Longrightarrow & a_0=f(0)\\
P_n'(0)=a_1=f'(0) & \Longrightarrow & a_1=f'(0)\\
P_n''(0)=2\,a_2=f''(0) & \Longrightarrow & a_2=\dfrac{f''(0)}{1\cdot 2}\\
P_n'''(0)=2\cdot 3\,a_3=f'''(0) & \Longrightarrow & a_3=\dfrac{f'''(0)}{1\cdot 2\cdot 3}\\
P_n^{(n)}(0)=n!\,a_n=f^{(n)}(0) & \Longrightarrow & a_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}
\end{array}$$

$$\boxed{P_n(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\dots+\frac{f^n(0)}{n!}x^n}$$

oder kurz unter Beachtung von $0!=1$:

$$\boxed{P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^k(0)}{k!}\cdot x^k}$$

Für viele Funktionen f gibt es eine positive Zahl R, den *Konvergenzradius*, mit dem exakt gilt:

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}P_n(x)=P_\infty(x)\text{ für }x\in]-R,R[$$

oder (MAC LAURIN'SCHE Reihe)

$$\boxed{f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^k(0)}{k!}\cdot x^k}$$

$g(h)=f(x_0+h)$ ist die um x_0 nach links verschobene Funktion $f(h)$. Damit gilt

$$g(0)=f(x_0)\quad\text{und}\quad g^{(k)}(0)=f^{(k)}(x_0)$$

$$f(x_0+h)=g(h)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{g^k(0)}{k!}\cdot h^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^k(x_0)}{k!}\cdot h^k$$

$$\boxed{f(x_0+h)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^k(x_0)}{k!}\cdot h^k}$$

(Taylor-Reihe)

Beispiele

Ausführlich geschrieben lautet die Taylor-Entwicklung:

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+$$
$$\frac{f''(x_0)}{2}h^2+\dots+\frac{f^k(x_0)}{k!}\cdot h^k+\dots$$

$$\boxed{T_n(h)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^k(x_0)}{k!}\cdot h^k}$$

heißt n-tes *Taylor-Polynom*. Das erste Taylor-Polynom $T_1(h)$ ist die lineare Näherung, $T_2(h)$ heißt dann quadratische Näherung usw.

Als Beispiel betrachten wir $f(x)=\sin x$ mit dem Entwicklungspunkt $x_0=0$. Aus

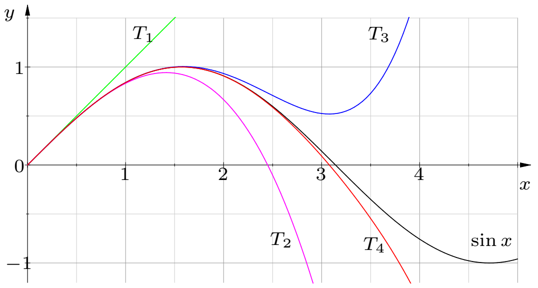
$$f'(x)=\cos x,\quad f''(x)=-\sin x,$$
$$f'''(x)=-\cos x\quad\text{und}\quad f^{(4)}(x)=\sin x$$

folgt

$$f(0)=0,\quad f'(0)=1,\quad f''(0)=0,$$
$$f'''(0)=-1\quad f^{(4)}(0)=0,\dots$$

und damit

$$\boxed{\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}\mp\dots}$$



Weitere Taylor-Entwicklungen:

$$\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{720}x^6\pm\dots\qquad R=\infty$$

$$\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7\dots\qquad R=\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+\dots\qquad R=1$$

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3\pm\dots\qquad R=1$$

Definitionen und Regeln

Das Newton-Verfahren

Die Nullstellen einer Funktion f können oft nicht in geschlossener Form berechnet werden, d.h. es gibt keinen Term für die Nullstellen, der schon bekannte Funktionen enthält. Trotzdem kann man die Nullstellen mit beliebiger Genauigkeit numerisch berechnen. Es sei x_0 der exakte Werte einer Nullstelle von f, d.h. $f(x_0) = 0$. Man braucht einen nicht unbedingt sehr genauen Näherungswert x_1 für x_0, den man z.B. grafisch ermittelt. Die Funktion f nähern wir durch die Tangente an f im Punkt $\mathrm{P}\,(x_1|y_1)$ mit $y_1 = f(x_1)$ an. Eine Verbesserung des Näherungswertes x_1 ist dann die Nullstelle x_2 der Tangente. Mit der Steigung $f'(x_1)$ der Tangente folgt

$$f'(x_1) = \frac{0 - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

und daraus

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Aus x_2 berechnet man dann die noch bessere Näherung x_3 u.s.w. Allgemein erhält man aus x_n den verbesserten Wert x_{n+1} mit

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

(**Newton-Verfahren**)

Eine Formel dieser Art, bei der aus einem Wert x_n der nächste Wert x_{n+1} berechnet wird, nennt man eine **Rekursionsformel**. Das Newtonverfahren ist also ein rekursives Verfahren zur Nullstellenberechnung.
Ist $f'(x)$ nicht bekannt oder zu kompliziert, dann verwendet man statt $f'(x)$ den Differenzenquotienten

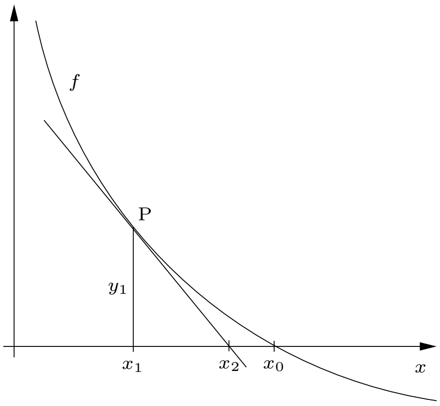
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \approx f'(x)$$

mit einem kleinen h. Damit erhält man

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)\cdot h}{f(x_n + h) - f(x_n)}}$$

Noch eine Bemerkung zur Wahl von h: Rein theoretisch wird das Ergebnis um so genauer, je kleiner h gewählt wird. Bei einem zu kleinen h sind aber die Rundungsfehler, die durch die endliche Genauigkeit des Taschenrechners hervorgerufen werden, zu groß. Bei einem Taschenrechner mit zehnstelliger Genauigkeit ist $h \approx x_n \cdot 10^{-5}$ eine gute Wahl.

Beispiele



Eine Gleichung, die auf herkömmlichem Weg nicht mehr gelöst werden kann, ist z.B.

$$\cos x = x$$

Mit

$$f(x) = \cos x - x \text{ und } f'(x) = -\sin x - 1$$

lautet die Rekursionsformel zur Berechnung der Lösung

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\cos x_n - x_n}{-\sin x_n - 1} = \frac{x_n \sin x_n + \cos x_n}{1 + \sin x_n}$$

Mit dem Startwert $x_1 = \frac{\pi}{4}$ erhält man

$$\begin{aligned} x_2 &= 0{,}7395361335 \\ x_3 &= 0{,}7390851781 \\ x_4 &= 0{,}7390851332 \\ x_5 &= 0{,}7390851332 \end{aligned}$$

Nach drei Rekursionen ist also schon eine Genauigkeit von zehn geltenden Ziffern erreicht.

Die Gleichung $2^x = x^2$ hat die Lösungen $X_1 = 2$, $X_2 = 4$ und X_3 mit $-1 < X_3 < 0$. Mit

$$f(x) = 2^x - x^2$$

lautet die Rekursionsformel für X_3:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(2^{x_n} - x_n^2)\cdot h}{2^{x_n+h} - (x_n + h)^2 - 2^{x_n} + x_n^2}$$

Mit dem Startwert $x_1 = -1$ und $h = 10^{-5}$ erhält man:

$$\begin{aligned} x_2 &= -0{,}7869221328 & x_3 &= -0{,}7668432765 \\ x_4 &= -0{,}7666647091 & x_5 &= -0{,}7666646960 \\ x_6 &= -0{,}7666646959 & x_7 &= -0{,}7666646959 \end{aligned}$$

$\mathrm{e}^{\mathbf{x}}$ und $\ln \mathbf{x}$

Die natürliche Exponentialfunktion

E sei eine Funktion, die gleich ihrer eigenen Ableitung ist und für die $E(0) = 1$ gilt:

$$E'(x) = E(x) \quad \text{und} \quad E(0) = 1$$

Damit sind alle Ableitungen von E gleich:

$$E^{(n)}(x) = E(x)$$

Die Taylor-Reihe von E mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ lautet:

$$\begin{aligned} E(x) &= E(0) + E(0)x + \frac{E(0)}{2}x^2 + ... = \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... \end{aligned}$$

oder

$$\boxed{E(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}}$$

Vorsicht bei den folgenden Bezeichnungen:
$E'(nx)$ ist E' an der Stelle nx
$[E(nx)]'$ ist die Ableitung von $E(nx)$

$$[E(nx)]' = E'(nx) \cdot (nx)' = nE'(nx) = nE(nx)$$

$$[E(x)^n]' = nE(x)^{n-1} \cdot \underbrace{E'(x)}_{E(x)} = nE(x)^n$$

$$\left[\frac{E(nx)}{E(x)^n}\right]' = \frac{nE(nx)E(x)^n - E(nx)nE(x)^n}{E(x)^{2n}} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{E(nx)}{E(x)^n} = C \text{ (konstant fur alle } x\text{)}$$

Einsetzen von $x = 0 \quad \Longrightarrow \quad C = 1$, d.h.

$$E(nx) = E(x)^n$$

Da n und x beliebige reelle Zahlen sind, gilt auch

$$E(nx) = E(xn) = E(n)^x$$

Wählt man speziell $n = 1$, folgt

$$E(x) = E(1 \cdot x) = E(1)^x$$

Mit der Definition (Eulersche Zahl)

$$\boxed{\mathrm{e} = E(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}}$$

gilt

$$\boxed{E(x) = \mathrm{e}^x}$$

Die Taylor-Reihe für e konvergiert schnell. Mit

$$\mathrm{e}_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

ergibt sich:

n	e_n
1	1
2	2
3	2,5
4	$2{,}\overline{6}$
5	$2{,}71\overline{6}$
...	...
13	2,7182818284467...
14	2,7182818284582...
15	2,7182818284589...

Die Werte e_n sind um $\delta_n = \mathrm{e} - \mathrm{e}_n$ kleiner als e:

$$\delta_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + ...$$

Ersetzt man in den Fakultäten alle Faktoren größer als $n+2$ durch $n+2$, dann gilt (geometrische Reihe, siehe S. 91)

$$\begin{aligned} \delta_n &< \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!(n+2)} + \frac{1}{(n+1)!(n+2)^2} + \\ &+ \frac{1}{(n+1)!(n+2)^3} + \frac{1}{(n+1)!(n+2)^4} + ... = \\ &= \frac{1}{(n+1)!}\left[\underbrace{1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + ...}_{\frac{1}{1-\frac{1}{n+2}} = \frac{n+2}{n+1}}\right] \end{aligned}$$

also

$$\frac{1}{(n+1)!} < \delta_n < \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1}$$

Einige Werte:

$$\begin{array}{rcl} 2{,}505 \cdot 10^{-8} < & \delta_{10} & < 2{,}733 \cdot 10^{-8} \\ 1{,}957 \cdot 10^{-20} & < \delta_{20} & < 2{,}050 \cdot 10^{-20} \\ 5{,}84 \cdot 10^{-99} & < \delta_{68} & < 5{,}93 \cdot 10^{-99} \end{array}$$

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}_n = \lim_{n\to\infty} (\mathrm{e} - \delta_n) = \mathrm{e}$$

Wir haben damit gezeigt, dass die Folge e_n tatsächlich gegen einen Grenzwert konvergiert. Auf ähnliche Weise kann man zeigen, dass die Folge $E_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ für alle x konvergiert, d.h. dass $E(x) = \lim\limits_{n\to\infty} E_n(x)$ für alle x definiert ist.

Definitionen und Regeln

Die natürliche Exponentialfunktion wird, besonders in Programmiersprachen, auch mit $\exp(x)$ bezeichnet.
Zusammenfassung:

$$\boxed{\begin{gathered}
\mathrm{e}^x = \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^x = (\mathrm{e}^x)' = \exp'(x) = \mathrm{e}^x \\
\mathrm{e}^0 = \exp(0) = 1, \qquad \mathrm{e}^1 = \exp(1) = \mathrm{e} \\
\mathrm{e}^x > 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \\
\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0^+
\end{gathered}}$$

$$[b\mathrm{e}^{ax}]' = ab\mathrm{e}^{ax}$$

$$\left[\mathrm{e}^{g(x)}\right]' = g'(x)\mathrm{e}^{g(x)}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = \infty} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{R}$$

Beweis:

$n = 0$: $$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$$

$n < 0$: $$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = \lim_{x\to+\infty} x^{|n|}\mathrm{e}^x = \\ = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$$

Für $n \in \mathbb{N}$ folgt:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x^n} + \frac{x}{x^n} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!x^n} + \right. \\ \left. + \frac{x^n}{n!\,x^n} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!\,x^n} + \ldots \right) = \\ = \lim_{x\to\infty} \left(\underbrace{\frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^{n-1}} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!\,x} +}_{\to 0} \right. \\ \left. + \frac{1}{n!} + \underbrace{\frac{x}{(n+1)!} + \frac{x^2}{(n+2)!} + \ldots}_{\to\infty} \right) = \infty$$

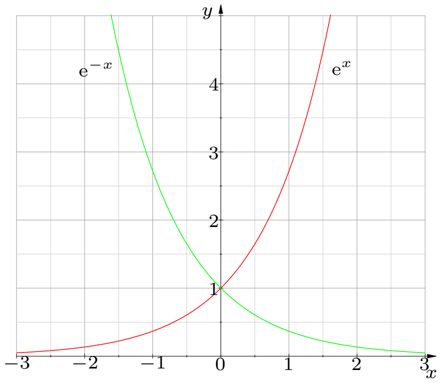
Für $n \notin \mathbb{N}$ und $n > 0$ gibt es ein $n_1 \in \mathbb{N}_0$ und ein $n_2 \in \mathbb{N}_0$ mit $n_1 < n < n_2$. Damit ist

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} > \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^{n_2}} = \infty \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = \infty$$

q.e.d

„Die Exponentialfunktion geht stärker gegen unendlich als jede Potenzfunktion.“

Beispiele



Der Graf von $g(x) = \mathrm{e}^{-x}$ ist der an der y-Achse gespiegelte Graf von $f(x) = \mathrm{e}^x$.

Weitere Grenzwerte, die aus der bewiesenen Grenzwertformel folgen ($P_n(x)$ ist ein Polynom vom Grad n):

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{\mathrm{e}^x} = \lim_{x\to+\infty} x^n\,\mathrm{e}^{-x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} P_n(x)\,\mathrm{e}^{-x} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^n\,\mathrm{e}^x = 0 \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x\to-\infty} P_n(x)\,\mathrm{e}^x = 0$$

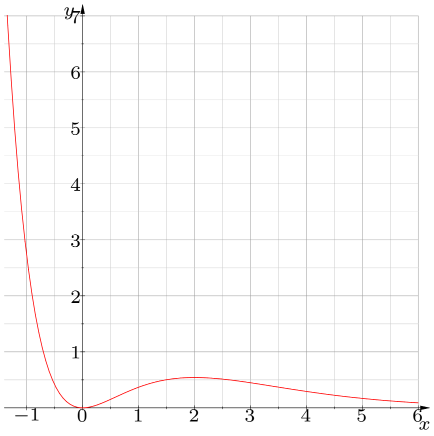
$$\lim_{x\to+\infty} (\mathrm{e}^x - x^n) = +\infty$$

Beispiel: $f(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}$, NS: $x_0 = 0$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$$

$$f'(x) = 2x\mathrm{e}^{-x} - x^2\mathrm{e}^{-x} = x(2-x)\mathrm{e}^{-x}$$

$$f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{11} = 0, \quad x_{12} = 2$$



Definitionen und Regeln

Monotonie

Im folgenden bezeichnet I immer ein *offenes* Intervall $]a, b[$.

Eine Funktion f heißt in I *streng monoton wachsend* oder *streng monoton steigend*, wenn für alle $x_1 \in I$ und $x_2 \in I$ gilt:

$$x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$$

Eine Funktion f heißt in I *monoton wachsend* oder *monoton steigend*, wenn für alle $x_1 \in I$ und $x_2 \in I$ gilt:

$$x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) \leqq f(x_2)$$

Eine Funktion f heißt in I *streng monoton abnehmend* oder *streng monoton fallend*, wenn für alle $x_1 \in I$ und $x_2 \in I$ gilt:

$$x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)$$

Eine Funktion f heißt in I *monoton abnehmend* oder *monoton fallend*, wenn für alle $x_1 \in I$ und $x_2 \in I$ gilt:

$$x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) \geqq f(x_2)$$

Für eine in I differenzierbare Funktion f gilt:

$f'(x) > 0 \ \forall x \in I \implies f$ streng steigend in I

$f'(x) \geqq 0 \ \forall x \in I \iff f$ steigend in I

$f'(x) < 0 \ \forall x \in I \implies f$ streng fallend in I

$f'(x) \leqq 0 \ \forall x \in I \iff f$ fallend in I

Aus f streng steigend in I folgt *nicht* $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$, wie folgendes Beispiel zeigt:

$f(x) = x^3$ ist streng steigend in $\mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2$ hat aber bei $x = 0$ eine Nullstelle.

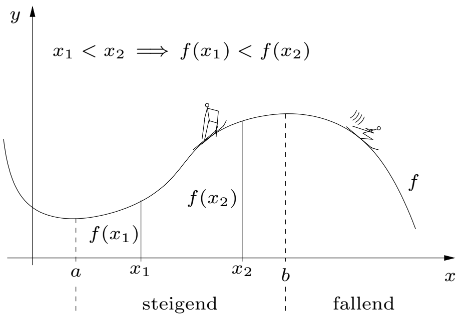
$f'(x)$ hat in I nur *isolierte* Nullstellen (es können sogar unendlich viele sein), wenn $f'(x)$ nicht in einem ganzen Teilintervall von I gleich null ist. Mit dieser Definition gilt:

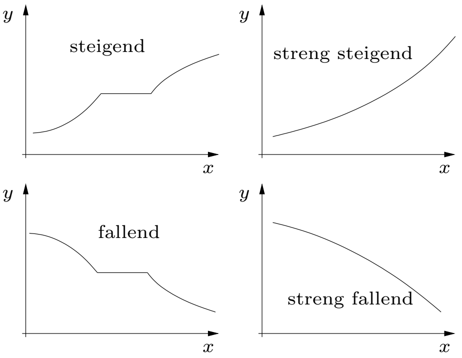
f streng steigend in I $\iff$

$f'(x) \geqq 0 \ \forall x \in I$ und $f'(x)$ hat keine oder nur isolierte Nullstellen in I.

Analoges gilt für f streng fallend.

Beispiele





Beispiel: $f(x) = \frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}$ mit $D_f = \mathbb{R}^+$

$$f'(x) = -\frac{1 + \cos\frac{1}{x}}{x^2}$$

Aus $\left|\cos\frac{1}{x}\right| \leqq 1$ folgt $1 + \cos\frac{1}{x} \geqq 0$ und damit

$$f'(x) \leqq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^+$$

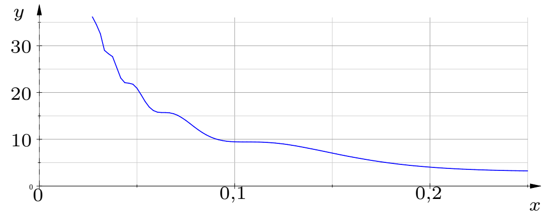
$$f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \cos\frac{1}{x} = -1$$

$$\frac{1}{x_k} = \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \qquad k \in \mathbb{N}$$

f' hat unendlich viele, aber isolierte Nullstellen bei

$$x_k = \frac{2}{\pi(3 + 4k)}$$

f ist also streng monoton fallend in $\mathbb{R}^+$.



Definitionen und Regeln

Die Umkehrfunktion

Ist f eine Funktion (siehe S.37), dann nennt man

$$\boxed{f^{-1} = \{(y|x) \,|\, (x|y) \in f\}}$$

die *Umkehrrelation* von f. Ist f^{-1} eine Funktion, dann heißt sie *Umkehrfunktion* von f und f heißt *umkehrbar*.
Vertauscht man also in allen Elementen (Wertepaaren) von f die x- mit der y-Koordinate, dann erhält man die Elemente von f^{-1}.

$$D_{f^{-1}} = W_f, \qquad W_{f^{-1}} = D_f$$

Ist f umkehrbar, dann gilt:

$$y = f(x) \iff (x|y) \in f \iff (y|x) \in f^{-1}$$
$$\iff f^{-1}(y) = x \iff f^{-1}(f(x)) = x$$

Genauso:

$$y = f^{-1}(x) \iff (x|y) \in f^{-1} \iff (y|x) \in f$$
$$\iff f(y) = x \iff f(f^{-1}(x)) = x$$

$$\boxed{f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}\left(f(x)\right) = x}$$

$$\boxed{f \circ f^{-1}(x) = f\left(f^{-1}(x)\right) = x}$$

> Den Grafen von f^{-1} erhält man durch Spiegelung des Grafen von f an der Geraden $y = x$.

> Eine stetige Funktion f ist genau dann umkehrbar, wenn sie streng monoton steigend oder streng monoton fallend ist.

Die Gleichung der Umkehrfunktion f^{-1} von f findet man so:

- $y = f(x)$ nach x auflösen liefert $x = f^{-1}(y)$.
- x und y vertauschen, um zur gewohnten Schreibweise mit x als unabhängiger Variabler zurüchzukehren.

Beispiel: $f(x) = 3x - 4$

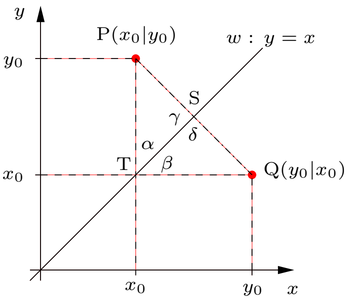
$$f(x) = y = 3x - 4$$
$$f^{-1}(y) = x = \frac{y-4}{3}$$
$$f^{-1}(x) = \frac{x-4}{3}$$

> Ist f streng steigend (fallend), dann ist f^{-1} auch streng steigend (fallend).

Beispiele

Der Spiegelpunkt von $\mathrm{P}(x_0|y_0)$ an der Geraden $w : y = x$ ist $\mathrm{Q}(y_0|x_0)$. Beweis über die Kongruenz

$$\triangle\mathrm{PTS} \cong \triangle\mathrm{QTS}$$



Beispiel: $f(x) = x^2$ mit $D_f = \mathbb{R}$ ist nicht umkehrbar, da f auf $\mathbb{R}$ weder streng monoton fallend noch streng monoton steigend ist. Jedoch sind die Einschränkungen

$$f_1(x) = x^2 \text{ mit } D_{f_1} = \mathbb{R}^-$$

und

$$f_2(x) = x^2 \text{ mit } D_{f_2} = \mathbb{R}^+$$

umkehrbar:

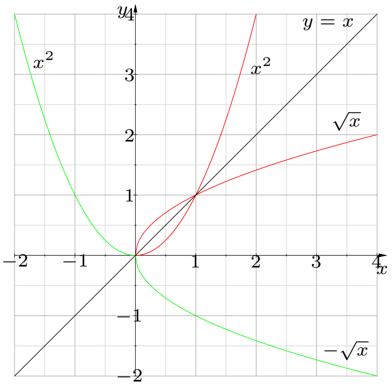
$$f_1^{-1}(x) = -\sqrt{x}, \qquad f_2^{-1}(x) = +\sqrt{x}$$

Wegen $D_{f_1} = \mathbb{R}^-$ ist das Argument x von f_1 negativ ($x < 0$), d.h.:

$$f_1^{-1} \circ f_1(x) = -\sqrt{x^2} = -|x| = x$$

Für f_2 ist $x > 0$:

$$f_2^{-1} \circ f_2(x) = +\sqrt{x^2} = |x| = x$$



$f(x)$	D_f	$f^{-1}(x)$	$D_{f^{-1}}$
x^2	$\mathbb{R}^+$	$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$
x^2	$\mathbb{R}^-$	$-\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$
x^3	$\mathbb{R}$	$\lvert x\rvert^{\frac{1}{3}} \operatorname{sgn} x$	$\mathbb{R}$
x^a	$\mathbb{R}^+$	$x^{\frac{1}{a}}$	$\mathbb{R}^+$
a^x $(a > 0)$	$\mathbb{R}$	$\log_a x$	$\mathbb{R}^+$
$\sin x$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$\arcsin x = \sin^{-1} x$	$[-1, 1]$
$\cos x$	$[0, \pi]$	$\arccos x = \cos^{-1} x$	$[-1, 1]$

Definitionen und Regeln

Die Ableitung der Umkehrfunktion

$g = f^{-1}$ ist die Umkehrfunktion von f. Nebenstehender Abbildung entnimmt man:

$$y = g(x) = f^{-1}(x), \qquad x = f(y)$$

$$g'(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{f'(y)}$$

$$\boxed{g = f^{-1} \quad \Longrightarrow \quad g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}}$$

oder in Worten:

> Die Ableitung der Umkehrfunktion f^{-1} an der Stelle x ist der Kehrwert der Ableitung von f an der Stelle $f^{-1}(x)$.

Beispiel: $f(x) = x^2$ mit $D_f = \mathbb{R}^+$

$$g(x) = f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

Aus $f'(x) = 2x$ folgt $f'(g(x)) = 2g(x)$:

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{2g(x)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Damit haben wir auf anderem Wege das schon bekannte Ergebnis für die Ableitung von $\sqrt{x}$ hergeleitet.

Der natürliche Logarithmus

Der Logarithmus zur Basis e heißt *natürlicher* Logarithmus und wird mit ln bezeichnet:

$$\boxed{\ln x = \log_{\mathrm{e}} x}$$

$\ln x$ ist die Umkehrfunktion von e^x:

$$\boxed{\ln \mathrm{e}^x = x} \qquad \boxed{\mathrm{e}^{\ln x} = x}$$

$$\boxed{\ln 1 = 0} \qquad \boxed{\ln e = 1}$$

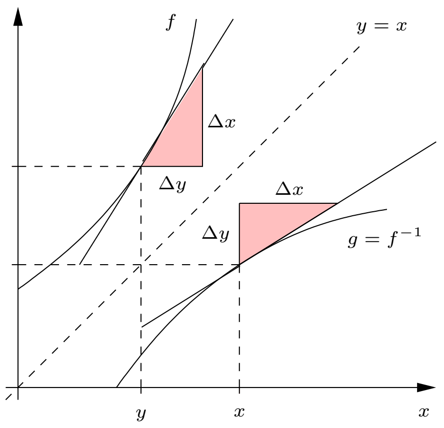
$$\boxed{\mathrm{e}^x = a \quad \Longrightarrow \quad x = \ln a}$$

Aus den Rechenregeln für Logarithmen (siehe S.92) folgt:

$$\boxed{\begin{aligned} \ln(ab) &= \ln a + \ln b \\ \ln \frac{a}{b} &= \ln a - \ln b \\ \ln \frac{1}{b} &= -\ln b \\ \ln\left(a^b\right) &= b \ln a \\ \log_a b &= \frac{\ln b}{\ln a} \end{aligned}}$$

$$a^x = b \Longrightarrow \ln\left(a^x\right) = x \ln a = \ln b \Longrightarrow x = \frac{\ln b}{\ln a}$$

Beispiele

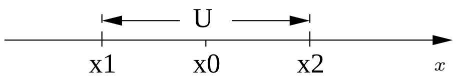


Beispiel: $f(x) = \sin x$ mit $D_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$g(x) = f^{-1}(x) = \sin^{-1}(x) = \arcsin x$$

Aus $\sin(\arcsin x) = x$ folgt

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = $$
$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$



$\ln x$ is nur für $x > 0$ definiert.

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty} \qquad \boxed{\lim_{x \to \infty} \ln x = \infty}$$

$$\ln \mathrm{e}^2 = 2 \qquad \ln \frac{1}{e} = -1$$

$$\ln \sqrt{\mathrm{e}} = \frac{1}{2} \qquad \ln \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} = -\frac{1}{2}$$

Definitionen und Regeln

Ableitung von $\ln \mathbf{x}$

Da $\ln x$ die Umkehrfunktion von e^x ist, gilt:
Die Ableitung von $\ln x$ an der Stelle x ist der Kehhrwert der Ableitung von e^x an der Stelle $\ln x$:

$$(\ln x)' = \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}}$$

Mit der Kettenregel folgt:

$$\boxed{(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}}$$

Reihenentwicklung von $\ln(\mathbf{1}+\mathbf{x})$

Da $\ln x$ bei $x_0 = 0$ nicht definiert ist, kann $\ln x$ nicht um den Nullpunkt in eine Taylorreihe entwickelt werden. Wir verwenden als Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ oder gleich die Funktion $\ln(1+x)$ mit $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1+x), & f'(x) &= \frac{1}{1+x} \\ f''(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2}, & f'''(x) &= \frac{2}{(1+x)^3} \\ f^{(4)}(x) &= -\frac{2\cdot 3}{(1+x)^4}, & f^{(5)}(x) &= \frac{2\cdot 3\cdot 4}{(1+x)^5} \end{aligned}$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\cdot\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!$$

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Die Taylorreihe (siehe S.117) von $\ln(1+x)$:

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \ldots}$$

$$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\cdot\frac{x^k}{k}}$$

Diese Formel gilt für alle x mit $-1 < x \leqq 1$.

Ersetzt man x durch $-x$, folgt

$$\boxed{\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots}$$

$$\boxed{\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}}$$

Beispiele

Für manche Funktionen ist es vorteilhaft, ihre Ableitung auf folgende Art zu berechnen (*logarithmisches Differenzieren*):

$$f'(x) = f(x)\cdot(\ln f(x))'$$

Beispiel: $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt[3]{x-2}}$

$$\ln f(x) = \frac{1}{2}\ln(x+3) - \frac{1}{3}\ln(x-2)$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt[3]{x-2}}\cdot\left(\frac{1}{2(x+3)} - \frac{1}{2(x-2)}\right)$$

Mit der Taylorreihe von $\ln(1+x)$ können die Werte von $\ln x$ für $x \in]0;2]$ berechnet werden.

$$\ln 2 = \ln(1+1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \ldots$$

Diese sogenannte *alternierende harmonische Reihe* konvergiert sehr langsam und ist für eine praktische Berechnung von $\ln 2$ nicht geeignet. Mit 10^4 Summanden erhält man nur drei geltende Ziffern von $\ln 2$. Mit $x = \sqrt{2} - 1$ erhält man mit 23 Summanden zehn geltende Ziffern von $\ln\sqrt{2}$:

$$\ln\sqrt{2} = \ln(1+x) \approx 0{,}3465735903$$

und damit

$$\ln 2 = \ln\left(\sqrt{2}^2\right) = 2\ln\sqrt{2} \approx 0{,}6931471806$$

Um $\ln x$ mit $x > 2$ zu berechnen, zerlegt man x:

$$x = y\cdot 2^n \text{ mit } n \in \mathbb{N} \text{ und } 1 \leqq y < 2$$

$$\ln x = \ln y + n\ln 2$$

Beispiel: $\ln 10, \qquad 10 = 1{,}25\cdot 2^3$

$$\ln 10 = \ln(1+0{,}25) + 3\ln 2$$

Mit 14 Summanden liefert die Taylorreihe:

$$\ln(1+0{,}25) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2\cdot 4^2} \pm \ldots = 0{,}2231435513$$

$$\Longrightarrow \quad \ln 10 \approx= 2{,}302585093$$

Für $0 < x < 1$ konvergiert die Taylorreihe für $\ln x$ schlecht, daher rechnet man:

$$\ln x = -\ln\frac{1}{x} \quad \text{mit} \quad \frac{1}{x} > 1$$

Definitionen und Regeln

Die Regel von de l'Hospital

Wir betrachten zwei Funktionen f und g mit $f(a) = g(a) = 0$. Ihre Taylorentwicklung ist

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + ... = \\ &= f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + ... \\ g(a+h) &= g'(a)h + \frac{g''(a)}{2}h^2 + ... \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} &= \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + ...}{g'(a)h + \frac{g''(a)}{2}h^2 + ...} = \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f'(a) + \frac{f''(a)}{2}h + \frac{f'''(a)}{6}h^2 + ...}{g'(a) + \frac{g''(a)}{2}h + \frac{g'''(a)}{6}h^2 + ...} = \\ &= \frac{f'(a)}{g'(a)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \end{aligned}$$

Allgemein gilt Die Regel von de l'Hospital:

Führt $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (a darf auch $\pm\infty$ sein) auf die Form $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, dann gilt

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

falls $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert.

Beispiele:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x + \sin x}{2x - \sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{2 + \cos x}{2 - \cos x} = 3$$

Mit $f(x) = x^2 - 2x + 3$ und $g(x) = x - 3$ ist

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{6}{0^+}\right) = +\infty$$

und

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 3^+}\frac{2x-2}{1} = 4 \neq +\infty$$

De l'Hospital hier nicht anwendbar, da weder die Form $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ noch $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Beispiele

Wir betrachten zwei Funktionen f und g mit

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty,$$

d.h.

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)} = \lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)} = 0$$

$$\begin{aligned} L = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \\ &= \lim_{x\to a}\frac{\left(\frac{1}{g(x)}\right)'}{\left(\frac{1}{f(x)}\right)'} = \lim_{x\to a}\frac{\frac{-g'(x)}{[g(x)]^2}}{\frac{-f'(x)}{[f(x)]^2}} = \\ &= \underbrace{\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^2}_{L^2} \cdot \lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)} \quad \Longrightarrow \end{aligned}$$

$$L = \frac{1}{\lim\limits_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Die Regel von de l'Hospital gilt also auch für Grenzwerte der Form $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Beispiele:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

Für $n > 0$ gilt:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{nx^n} = 0$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^n} = 0 \text{ für } n > 0}$$

Grenzwerte der Form $(0\cdot\infty)$ bringt man auf die Form $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ oder $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+}(x\ln x) = (0\cdot(-\infty)) &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{-\infty}{\infty}\right) = \\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0^- \end{aligned}$$

Für $n > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+}(x^n\ln x) = (0\cdot(-\infty)) &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^{-n}} = \left(\frac{-\infty}{\infty}\right) = \\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-nx^{-n-1}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^n}{-n} = 0^- \end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+}(x^n\ln x) = 0^- \text{ für } n > 0}$$

Definitionen und Regeln

Beliebige Basen

Jede Exponentialfunktion kann als natürliche Exponentialfunktion geschrieben werden:

$$a = \mathrm{e}^{\ln a} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}}$$

$$(a^x)' = \left(\mathrm{e}^{x \ln a}\right)' = \mathrm{e}^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a$$

$$\boxed{(a^x)' = a^x \ln a}$$

Jede Logarithmusfunktion kann als natürliche Logarithmusfunktion geschrieben werden:

$$\boxed{\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}}$$

Anwendungen

In vielen Anwendungen ist die Änderung Δf einer Funktion f für kleine Änderungen Δx der unabhängigen Variablen proportional zum momentanen Funktionswert $f(x)$ und zu Δx:

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = k \cdot f(x) \cdot \Delta x$$

Für $\Delta x \to 0$ folgt

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x) = kf(x)$$

$$\boxed{\text{Die Änderungsrate } f'(x) \text{ der Funktion } f \text{ ist proportional zum Funktionswert } f(x).}$$

Die Lösung der Differentialgleichung

$$f'(x) = kf(x)$$

ist

$$f(x) = C\mathrm{e}^{kx}$$

mit $f(0) = Ce^0 = C$, also

$$\boxed{f'(x) = kf(x) \quad \Longrightarrow \quad f(x) = f(0) \cdot \mathrm{e}^{kx}}$$

Beispiele:

- Bakterienwachstum
- Wachstum der Erdbevölkerung
- Stetige Verzinsung

Beispiele

Wir betrachten die Funktion f mit

$$f(x) = x^x = \mathrm{e}^{x \ln x} \text{ und } D_f = \mathbb{R}^+ :$$

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} \mathrm{e}^{x \ln x} = \mathrm{e}^0 = 1$$

$$f'(x) = \mathrm{e}^{x \ln x} \cdot \left(\ln x + \frac{x}{x}\right) = (1 + \ln x)x^x$$

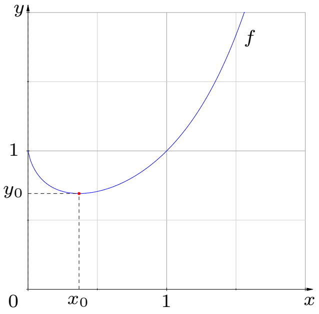
NS von f':

$$\ln x = -1 \quad \Longrightarrow$$

$$x_0 = \frac{1}{\mathrm{e}} \approx 0{,}368$$

$$y_0 = f(x_0) =$$

$$\mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}}} \approx 0{,}692$$



Zerfallsgesetz:

$N(t)$ sei die Zahl der noch nicht zerfallenen Atome eines radioaktiven Materials. Für kleien Zeiten ist die Zahl der zerfallenen Atome

$$|\Delta N| = -\Delta N = -(N(t + \Delta t) - N(t))$$

proportional zu $N(t)$ und Δt, d.h.

$$\Delta N = -\lambda N(t) \Delta t$$

oder

$$\dot{N}(t) = -\lambda N(t)$$

mit der Zerfallskonstanten λ. Die Lösung dieser Gleichung ist das *Zerfallsgesetz*

$$N(t) = N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t} \quad \text{mit} \quad N_0 = N(0)$$

Nach der *Halbwertszeit* T ist die Hälfte der Atome zerfallen:

$$N(T) = \frac{N_0}{2} = N_0 \mathrm{e}^{-\lambda T} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{e}^{-\lambda T} = \frac{1}{2}$$

$$-\lambda T = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2 \quad \Longrightarrow \quad T = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

Die Zahl der Zerfälle pro Zeit ist die negative Änderungsrate von N ($\dot{N}$ ist negativ) und wird *Aktivität* genannt:

$$A(t) = -\dot{N}(t) = \lambda N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t} = \lambda N(t)$$

Mit $A_0 = A(0) = \lambda N_0$ gilt

$$A(t) = A_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

Definitionen und Regeln

Untersuchung von Funktionen

Extremwerte (Extrema)

Das offene Intervall

$$U_\delta(x_0) =]x_0-\delta, x_0+\delta[\quad \text{mit } \delta > 0$$

heißt δ-Umgebung von x_0.

$y_0 = f(x_0)$ heißt *absolutes Maximum* von f, wenn $x_0 \in D_f$ und

$$f(x) \leqq y_0 \quad \forall\, x \in D_f$$

$y_0 = f(x_0)$ heißt *relatives Maximum* von f, wenn es ein $U_\delta(x_0) \subseteqq D_f$ gibt mit

$$f(x) \leqq y_0 \quad \forall\, x \in \dot{U}_\delta(x_0)\}$$

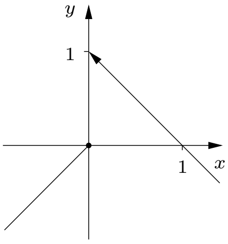
$y_0 = f(x_0)$ heißt *eigentliches relatives Maximum* von f, wenn es ein $U_\delta(x_0) \subseteqq D_f$ gibt mit

$$f(x) < y_0 \quad \forall\, x \in \dot{U}_\delta(x_0)\}$$

Maxima und Minima heißen auch *Extremwerte* (*Extrema*, Einzahl: *Extremum*).

Es gibt Funktionen, die keinen Extremwert haben, z.B.

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \leqq 0 \\ 1-x & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

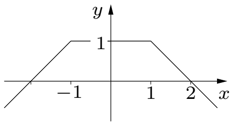


Die Wertemenge von f ist $W_f =]-\infty, 1[$. 1 ist nicht das Maximum von f, da es kein x_0 gibt mit $f(x_0) = 1$ ($f(0) = 0$).

Die Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } |x| \leqq 1 \\ 2-|x| & \text{für } |x| > 1 \end{cases}$$

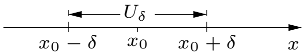
hat das absolute und relative Maximum 1, es handelt sich aber um kein *eigentliches* relatives Maximum.



Beispiele

Gelochte (punktierte) δ-Umgebung (ohne Mittelpunkt):

$$\dot{U}_\delta(x_0) = U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$$



$y_0 = f(x_0)$ heißt *absolutes Minimum* von f, wenn $x_0 \in D_f$ und

$$f(x) \geqq y_0 \quad \forall\, x \in D_f$$

$y_0 = f(x_0)$ heißt *relatives Minimum* von f, wenn es ein $U_\delta(x_0) \subseteqq D_f$ gibt mit

$$f(x) \geqq y_0 \quad \forall\, x \in \dot{U}_\delta(x_0)\}$$

$y_0 = f(x_0)$ heißt *eigentliches relatives Minimum* von f, wenn es ein $U_\delta(x_0) \subseteqq D_f$ gibt mit

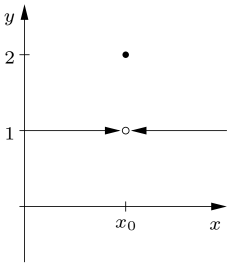
$$f(x) > y_0 \quad \forall\, x \in \dot{U}_\delta(x_0)\}$$

Einen relativen Extremwert kann es geben bei

■ Unstetigkeitsstellen von f, z.B.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \neq x_0 \\ 2 & \text{für } x = x_0 \end{cases}$$

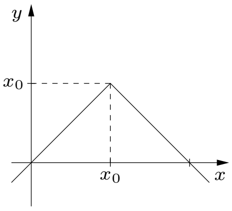
Relatives und absolutes Maximum ist 2 an der Stelle x_0.



■ nicht differenzierbaren Stellen von f, z.B.

$$f(x) = x_0 - |x - x_0|$$

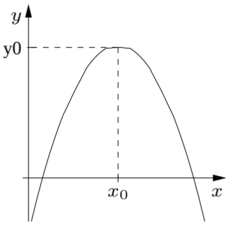
Relatives und absolutes Maximum ist x_0 an der Stelle x_0.



■ Stellen mit waagrechter Tangente ($f'(x_0) = 0$), z.B.

$$f(x) = y_0 - (x - x_0)^2$$

Relatives und absolutes Maximum ist y_0 an der Stelle x_0.



Definitionen und Regeln	**Beispiele**

Notwendige und hinreichende Bedingungen für Extremwerte

A und B sind zwei Aussagen (siehe 73), für die

$$\text{A} \implies \text{B}$$

gilt. A ist dann eine *hinreichende Bedingung* für B und B eine *notwendige Bedingung* für A.

A = „Die Sonne scheint.“
B = „Es ist Tag.“

A ist eine hinreichende Bedingung für B, da aus bei Sonnenschein sicher Tag ist. Andererseits ist B eine notwendige Bedingung für A, da die Sonne nur am Tag scheinen kann. B ist aber nicht hinreichend für A, da es am Tag bewölkt sein kann und die Sonne nicht scheint.

Ist $y_0 = f(x_0)$ ein eigentlich relatives Maximum (Minimum), dann nennt man $(x_0 \,|\, y_0)$ einen *Hochpunkt* (*Tiefpunkt*) von f. Hoch- und Tiefpunkte nennt man auch *relative Extrempunkte.*

Hinreichende Kriterien für Hoch- und Tiefpunkte:

$]a,b[\in D_f \;\wedge\; x_0 \in]a,b[\;\wedge\; f$ streng steigend in $]a,x_0[\;\wedge\; f$ streng fallend in $]x_0,b[\;\implies$
eig. relatives Maximum (HP) bei $(x_0 \,|\, f(x_0))$

$]a,b[\in D_f \;\wedge\; x_0 \in]a,b[\;\wedge\; f$ streng fallend in $]a,x_0[\;\wedge\; f$ streng steigend in $]x_0,b[\;\implies$
eig. relatives Minimum (TP) bei $(x_0 \,|\, f(x_0))$

Ist f differenzierbar in $]a,b[$ und $x_0 \in]a,b[$, dann gilt:

$f'(x_0) = 0 \;\wedge\; f'(x) > 0 \;\forall x \in]a,x_0[\;\wedge$
$f'(x) < 0 \;\forall x \in]x_0,b[\;\implies$
eig. relatives Maximum (HP) bei $(x_0 \,|\, f(x_0))$

$f'(x_0) = 0 \;\wedge\; f'(x) < 0 \;\forall x \in]a,x_0[\;\wedge$
$f'(x) > 0 \;\forall x \in]x_0,b[\;\implies$
eig. relatives Minimum (TP) bei $(x_0 \,|\, f(x_0))$

Zum VZW (Vorzeichenwechsel) siehe S.129:

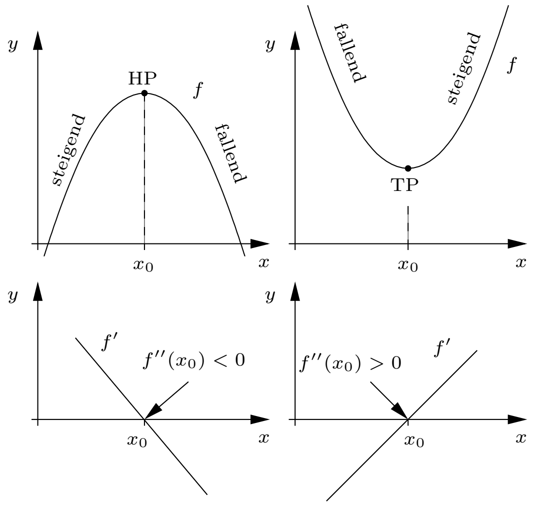
$f'(x_0) = 0 \wedge$ VZW von $f'(x)$ bei $x_0 \implies$
eig. relativer Extremwert bei $(x_0 \,|\, f(x_0))$

In einer Umgebung eines Hochpuktes ist eine zweimal differenzierbare Funktion rechtsgekrümmt, in der Umgebeung eines Tiefpunktes linksgekrümmt.

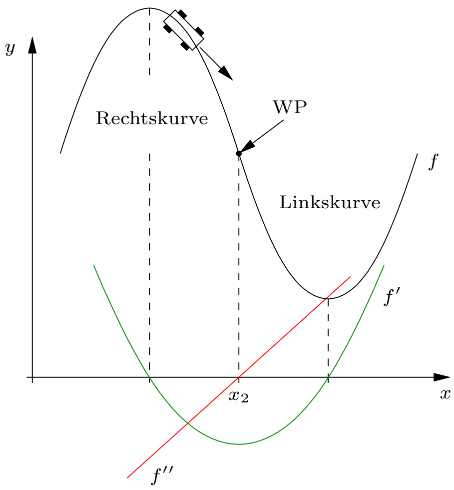
Ist f zweimal differenzierbar in $]a,b[$ und $x_0 \in]a,b[$, dann gilt:

$f'(x_0) = 0 \;\wedge\; f''(x_0) < 0 \implies$
eig. relatives Maximum (HP) bei $(x_0 \,|\, f(x_0))$

$f'(x_0) = 0 \;\wedge\; f''(x_0) > 0 \implies$
eig. relatives Minimum (TP) bei $(x_0 \,|\, f(x_0))$



Stellt man sich G_f als Straße vor, die man in positiver x-Richtung befährt (also nach rechts), dann heißt f dort *rechtsgekrümmt*, wo man eine Rechtskurve fährt und *linksgekrümmt*, wo man das Steuer nach links einschlagen muss.



f rechtsgekrümmt	$\iff$	$f''(x) < 0$
f linkssgekrümmt	$\iff$	$f''(x) > 0$

Definitionen und Regeln

Für den Extremwert einer in $]a, b[$ differenzierbaren Funktion gilt folgendes notwendige Kriterium:

f' existiert in $]a, b[$ und relativer Extremwert bei $x_0 \in]a, b[\quad \Longrightarrow \quad f'(x_0) = 0$

Ein Punkt $\mathrm{T}(x_0|f(x_0))$ heißt *Terrassenpunkt* oder *Sattelpunkt* (SP), wenn zwar $f'(x_0) = 0$ gilt, $f(x_0)$ aber kein relativer Extremwert ist.

Beispiele

Das nebenstehende Kriterium ist zwar notwendig, aber nicht hinreichend, wie das Beispiel $f(x) = x^3$ zeigt:

$$f'(x) = 3x^2 \quad \Longrightarrow \quad f'(0) = 0$$

Wegen $f'(x) \geqq 0 \, \forall \, x \in \mathbb{R}$ ist bei $x_0 = 0$ aber kein Extremwert, d.h. $(0|0)$ ist ein Terrassenpunkt (Sattelpunkt).

Wendepunkte

Wir präzisieren den Begriff *Vorzeichenwechsel*:

f hat bei x_0 einen Vorzeichenwechsel (VZW), wenn $f(x)$ in einer gelochten Umgebung $\dot{U}_\delta(x_0)$ existiert und entweder

$f(x) > 0$ für $x \in]x_0 - \delta, x_0[$ und
$f(x) < 0$ für $x \in]x_0, x_0 + \delta[$

oder

$f(x) < 0$ für $x \in]x_0 - \delta, x_0[$ und
$f(x) > 0$ für $x \in]x_0, x_0 + \delta[$

gilt.

Im Folgenden betrachten wir eine Funktion f, deren erste Ableitung in einer Umgebung $U_\delta(x_0)$ und deren zweite Ableitung in der gelochten Umgebung $\dot{U}_\delta(x_0)$ existiert.

$\mathrm{W}(x_0|f(x_0))$ heißt *Wendepunkt* (WP) von f, wenn f'' bei x_0 einen Vorzeichenwechsel hat.

oder kurz:

WP von f bei $x_0 \iff$
$f'(x_0)$ existiert und VZW von f'' bei x_0

Ein Wendepunkt trennt also einen linksgekrümmten von einem rechtsgekrümmten Bereich der Funktion. Wegen der Forderung nach Existenz der ersten Ableitung bei x_0 hat der Graf von f beim Wendepunkt keinen Knick.

Ein notwendiges Kriterium für einen WP:

f'' existiert in $]a, b[$ und Wendepunkt bei $x_0 \in]a, b[\quad \Longrightarrow \quad f''(x_0) = 0$

Hinreichendes Kriterium für einen Wendepunkt:

$f''(x_0) = 0 \wedge f'''(x_0) \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad$ WP bei x_0

Die Tatsache, dass $f''(x_0) = 0$ ist, also $f''(x_0)$ existiert, beinhaltet auch die Existenz von $f'(x_0)$.

Ein Sattelpunkt (SP) oder Terrassenpunkt ist ein Wendepunkt mit waagrechter Tangente.

Ein Punkt $(x_0|f(x_0))$ heißt *Flachpunkt* (FP) von f, wenn f'' in einer Umgebung $U_\delta(x_0)$ existiert, $f''(x_0) = 0$ ist und f'' bei x_0 stetig ist.

In der Umgebung eines Flachpunktes ändert sich die Steigung von f nur sehr langsam und der Graf von f ist dort sehr gut durch eine Gerade approximierbar.

Beispiele:

Für $f(x) = \begin{cases} x^4 \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$ ist f'' in ganz $\mathbb{R}$ definiert, $f''(0) = 0$ aber f'' nicht stetig bei $x_0 = 0$, also ist $(0|0)$ kein Flachpunkt. Da f'' in jeder Umgebung von 0 unendlich oft das Vorzeichen wechselt, hat f'' nach unserer Definition bei 0 keinen VZW und $(0|0)$ ist auch kein WP.

$$f(x) = x \cdot |x| = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \geqq 0 \\ -x^2 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } x \geqq 0 \\ -2x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{für } x > 0 \\ -2 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

$(0|0)$ ist WP, aber kein FP ($f''(0)$ existiert nicht).

$f(x) = x^4, \quad f'(x) = 4x^3, \quad f''(x) = 12x^2$

$f'''(x) = 24x$

$f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$

$f'(x) < 0$ für $x < 0$ und $f'(x) > 0$ für $x > 0$

$f''(x) > 0$ für $x \neq 0$

$(0|0)$ ist TP und FP, aber kein WP.

Definitionen und Regeln

Hinreichende Kriterien für besondere Punkte, wenn mindestens die erste Ableitung an der Stelle x_0 verschwindet:

f sei eine Funktion, deren ersten n Ableitungen $(n \geqq 2)$ in einem Intervall $]a; b[$ existieren und $x_0 \in]a; b[$. Dann gilt:

Aus

$$f^{(k)}(x_0) = 0 \;\forall\, k \leqq n-1 \;\wedge\; f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

folgt

SP bei x_0 für n ungerade

HP bei x_0 für n gerade $\wedge$ $f^{(n)}(x_0) < 0$

TP bei x_0 für n gerade $\wedge$ $f^{(n)}(x_0) > 0$

Ist $\mathrm{W}(x_0 \,|\, f(x_0))$ ein WP von f, dann heißt die Tangente an G_f in W *Wendetangente*. Den Funktionsterm $t(x)$ der Wendetangente erhält man über ihre Steigung:

$$\frac{t(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \quad \Longrightarrow$$

$$t(x) = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - x_0 f'(x_0)$$

Wir betrachten die allgemeine ganzrationale Funktion dritten Grades mit dem Funktionsterm

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad a \neq 0 \\ f'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \\ f''(x) &= 6ax + 2b \\ f'''(x) &= 6a \end{aligned}$$

Die zweite Ableitung hat genau eine Nullstelle

$$x_2 = -\frac{b}{3a}$$

Wegen $f'''(x_2) = 6a \neq 0$ ist $(x_2 | f(x_2))$ ein WP. Da jede ganzrationale Funktion dritten Grades punktsymmetrisch ist (siehe S. 98), gilt:

Jede ganzrationale Funktion dritten Grades hat genau einen Wendepunkt, zu dem ihr Graf punktsymmetrisch ist.

Beispiele

Beispiele zum Nachprüfen:

$f(x) = x^3$, $f'(0) = f''(0) = 0$, $f'''(0) = 6 \neq 0$

$\Longrightarrow$ TRP bei $x_0 = 0$

$f(x) = x^4$, $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$

$f^{(4)}(0) = 24 > 0 \Longrightarrow$ TP bei $x_0 = 0$

$f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $n \geqq 2$

$f'(0) = f''(0) = ... = f^{(n-1)}(0) = 0$

$f^{(n)}(0) = n! > 0 \Longrightarrow$

TP bei $x_0 = 0$ für n gerade

SP bei $x_0 = 0$ für n ungerade

$f(x) = \dfrac{20 \ln x}{x^2}$, NS bei $x_0 = 1$

$f'(x) = \dfrac{20(1 - 2\ln x)}{x^3}$, NS bei $x_1 = \sqrt{\mathrm{e}}$

$f''(x) = \dfrac{-20(5 - 6\ln x)}{x^4}$, NS bei $x_2 = \mathrm{e}^{\frac{5}{6}}$

$f'''(x) = \dfrac{40(13 - 12\ln x)}{x^5}$

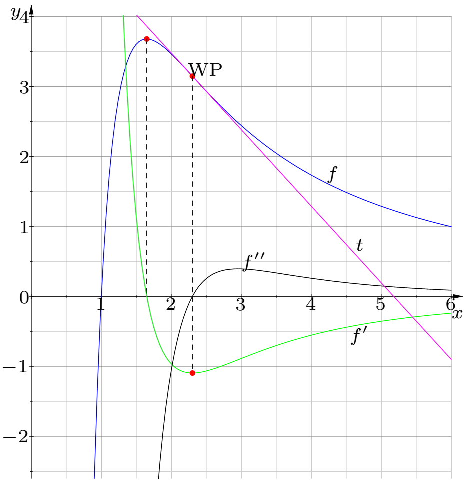
$f''(x_1) = -\dfrac{40}{\mathrm{e}^2} < 0 \Longrightarrow$ HP bei $\left(\sqrt{\mathrm{e}} \,\middle|\, \dfrac{10}{\mathrm{e}}\right)$

$f'''(x_2) = 120\mathrm{e}^{-\frac{25}{6}} \neq 0 \Longrightarrow$

WP und FP bei $\left(\mathrm{e}^{\frac{5}{6}} \,\middle|\, \dfrac{50}{3}\mathrm{e}^{-\frac{5}{3}}\right)$

Wendetangente t: $\dfrac{t(x) - f(x_2)}{x - x_2} = f'(x_2)$

$$t(x) = -\frac{40}{3}\mathrm{e}^{-\frac{5}{2}} \cdot x + 30\mathrm{e}^{-\frac{5}{3}}$$



Geometrie

Definitionen und Regeln

Vektorrechnung

Der dreidimensionale Raum

Sind A und B Mengen, dann heißt

$$A \times B = \{(x|y) | x \in A \wedge y \in B\}$$

das *kartesische Produkt* von A und B.
Die Menge aller Paare von reellen Zahlen ist $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x|y) \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$$

Die Menge aller Tripel reeller Zahlen ist $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbb{R}^3 = \{(x|y|z) \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge z \in \mathbb{R}\}$$

Im $\mathbb{R}^3$ definiert man eine *Metrik*, d.h. eine Funktion, die zwei Elementen $\overline{A} = (a_1|a_2|a_3)$ und $\overline{B} = (b_1|b_2|b_3)$ des $\mathbb{R}^3$ eine reelle Zahl $d \geqq 0$ zuordnet:

$$d(\overline{A}, \overline{B}) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Jedem Element $\overline{X} = (x_1|x_2|x_3) \in \mathbb{R}^3$ entspricht ein Punkt $\mathrm{X}(x_1|x_2|x_3) \in \mathrm{E}^3$ des dreidimensionalen euklidischen Punktraumes E^3. Identifiziert man die Metrik $d(\overline{A}, \overline{B})$ des $\mathbb{R}^3$ mit der Streckenlänge $\overline{\mathrm{AB}}$ im E^3, dann ist der $\mathbb{R}^3$ vollkommen äquivalent zum E^3, d.h. man kann die euklidische dreidimensionale Geometrie rechnerisch im $\mathbb{R}^3$ abwickeln (*analytische Geometrie*). Wegen dieser Äquivalenz unterscheiden wir nicht mehr zwischen Elementen des $\mathbb{R}^3$ (Zahlentripel) und Elementen des E^3 (Punkten).
Entsprechendes gilt natürlich für den $\mathbb{R}^2$ und die *euklidische Ebene* E^2.

Kugel und Kreis

Ist M ein fester Punkt und r eine Konstante, dann ist die Menge

$$K = \{\mathrm{X} \mid \overline{\mathrm{MX}} = r\}$$

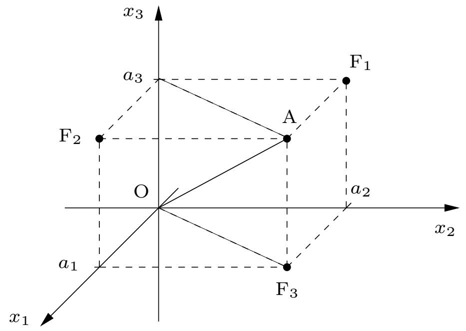
die Kugeloberfläche (im $\mathbb{R}^3$) bzw. Kreislinie (im $\mathbb{R}^2$) um M mit Radius r. Da $\overline{\mathrm{MX}} \geqq 0$ und $r \geqq 0$, ist $\overline{\mathrm{MX}} = r$ äquivalent zu $\overline{\mathrm{MX}}^2 = r^2$ und die Gleichung der Kugel lautet mit $\mathrm{M}(m_1|m_2|m_3)$ und $\mathrm{X}(x_1|x_2|x_3)$:

$$\boxed{(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 = r^2}$$

Die Lösungsmenge dieser Gleichung mit den drei Unbekannten x_1, x_2 und x_3 besteht aus Zahlentripeln $(x_1|x_2|x_3)$, die genau den Punkten von K entsprechen.

Beispiele

Zum Zeichnen von Schrägbildern siehe S.77.



Die Abbildung zeigt den Punkt $\mathrm{A}(a_1|a_2|a_3)$ im Schrägbild.

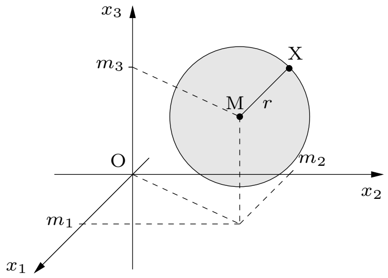
$$\overline{\mathrm{OA}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Fußpunkte von A in den Koordinatenebenen:

in der x_2x_3-Ebene: $\mathrm{F}_1(0|a_2|a_3)$
in der x_1x_3-Ebene: $\mathrm{F}_2(a_1|0|a_3)$
in der x_1x_2-Ebene: $\mathrm{F}_3(a_1|a_2|0)$

Beispiel: Die Punkte $\mathrm{A}(-2|3|-5)$ und $\mathrm{B}(1|-1|7)$ haben die Entfernung

$$d = \sqrt{(1-(-2))^2 + (-1-3)^2 + (7-(-5))^2} =$$
$$= \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} = 13$$



Kugel um $\mathrm{M}(4|0|-3)$ mit $r = 5$:

$$(x_1 - 4)^2 + x_2^2 + (x_3 + 3)^2 = 25$$

Kreis um $\mathrm{M}(2|7)$ mit $r = 4$:

$$(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 7)^2 = 16$$

Definitionen und Regeln

Vektoren

Ein *Pfeil* ist eine gerichtete Srecke. Den Pfeil, der vom Punkt A zum Punkt B zeigt, bezeichnen wir mit $\overset{\Longrightarrow}{\mathrm{AB}}$. Zwei Pfeile heißen *parallelgleich*, wenn sie durch eine Parallelverschiebung ineinander übergeführt werden können.

Die Menge aller zu einem Pfeil $\overset{\Longrightarrow}{\mathrm{AB}}$ parallelgleichen Pfeile heißt *Vektor* $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$. Jedes Element (also jeder Pfeil) von $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ heißt *Repräsentant* von $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

Ein Vektor $\vec{v}$ ist durch einen seiner Repräsentanten schon eindeutig bestimmt. Es genügt sogar das Wissen, wie man vom Anfangspunkt $\mathrm{A}(a_1|a_2|a_3)$ eines Repräsentanten $\overset{\Longrightarrow}{\mathrm{AB}}$ zu seinem Endpunkt $\mathrm{B}(b_1|b_2|b_3)$ gelangt, d.h. es genügt die Kenntnis der Koordinatendifferenzen

$$v_1 = b_1 - a_1,\ v_2 = b_2 - a_2 \text{ und } v_3 = b_3 - a_3.$$

Diese Differenzen nennt man die Koordinaten des Vektors $\vec{v}$ und schreibt dafür

$$\boxed{\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}}$$

Anschaulich bedeuten die Vektorkoordinaten:
Um vom Anfangspunkt zum Endpunkt eines Repräsentanten zu gelangen, bewegt man sich um v_1 in x_1-Richtung, um v_2 in x_2-Richtung und um v_3 in x_3-Richtung.

Kriterien für die Gleichheit zweier Vektoren:

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind gleich, wenn ein beliebiger Repräsentant von $\vec{a}$ parallelgleich zu einem beliebigen Repräsentanten von $\vec{b}$ ist.

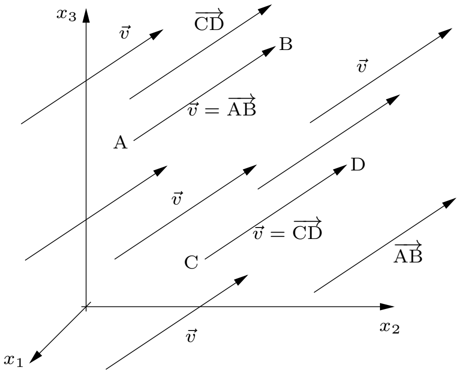
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a_1 = b_1 & \wedge \\ a_2 = b_2 & \wedge \\ a_3 = b_3 \end{cases}$$

Der Repräsentant eines Vektors $\vec{a}$, dessen Anfangspunkt der Koordinatenursprung O ist, heißt *Ortsvektor*. Dieser Sprachgebrauch ist üblich, obwohl es sich *nicht* um einen Vektor handelt!

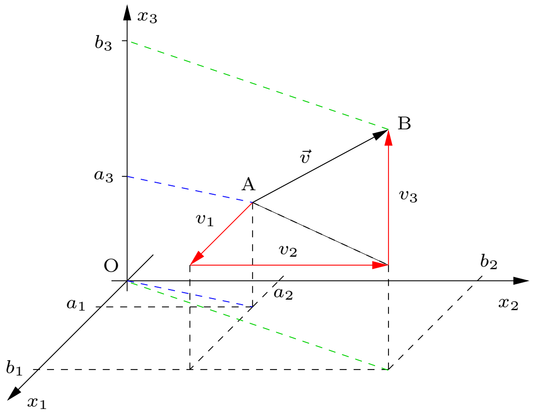
$$\boxed{\mathrm{A}(a_1|a_2|a_3) \iff \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{\mathrm{A}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}}$$

Beispiele

Parallelgleiche Pfeile als Repräsentanten des Vektors $\vec{v}$: $\overset{\Longrightarrow}{\mathrm{AB}}$ parallelgleich zu $\overset{\Longrightarrow}{\mathrm{CD}}$, aber $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$.

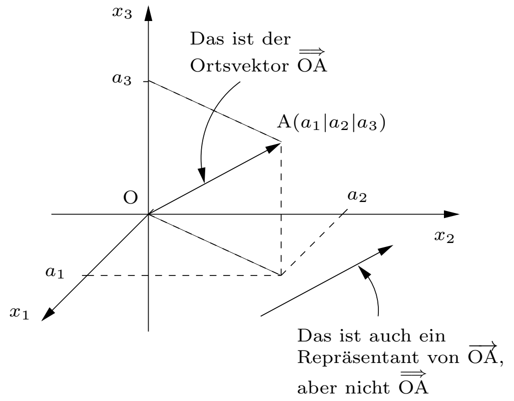


In Abbildungen ist es üblich, die Repräsentanten eines Vektors mit dem Vektornamen zu bezeichnen.



Sind ein Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ und ein Punkt $\mathrm{P}(p_1|p_2|p_3)$ gegeben, dann ist der Punkt Q durch $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \vec{v}$ eindeutig bestimmt:

$$\mathrm{Q}(p_1 + v_1 \,|\, p_2 + v_2 \,|\, p_3 + v_3)$$



Das ist der Ortsvektor $\overset{\Longrightarrow}{\mathrm{OA}}$

Das ist auch ein Repräsentant von $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, aber nicht $\overset{\Longrightarrow}{\mathrm{OA}}$

Definitionen und Regeln | **Beispiele**

Addition und Subtraktion von Vektoren

Gegeben sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ und ein beliebuger Punkt P$(p_1|p_2|p_3)$. Q und R sind definiert durch $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \vec{a}$ und $\overrightarrow{\mathrm{QR}} = \vec{b}$, d.h.

$$\mathrm{Q}(p_1 + a_1 \,|\, p_2 + a_2 \,|\, p_3 + a_3) \text{ und}$$

$$\mathrm{R}(p_1 + a_1 + b_1 \,|\, p_2 + a_2 + b_2 \,|\, p_3 + a_3 + b_3)$$

$\vec{a} + \vec{b}$ definiert man den Vektor $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$:

$$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{PQ}} + \overrightarrow{\mathrm{QR}} = \overrightarrow{\mathrm{PR}}$$

oder in Koordinatenschreibweise:

$$\boxed{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}}$$

Die Differenz zweier Vektoren definiert man als Lösung einer Gleichung:

$$\vec{x} = \vec{b} - \vec{a} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{a} + \vec{x} = \vec{b}$$

Daraus folgt:

$$\boxed{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}}$$

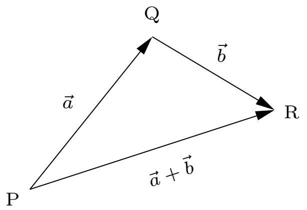
Da die Addition und die Subtraktion von Vektoren koordinatenweise erfolgt, übertragen sich die Rechengesetzte für reelle Zahlen auf das Rechnen mit Vektoren:

Kommutativgesetz:

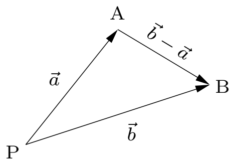
$$\boxed{\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}}$$

Assoziativgesetz:

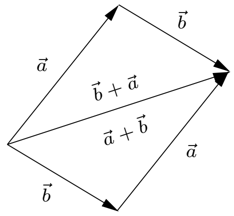
$$\boxed{(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})}$$



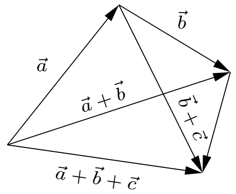
$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{PB}} - \overrightarrow{\mathrm{PA}}$



Kommutativgesetz:



Assoziativgesetz:



Der *Nullvektor*: $\vec{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Beispiel: $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{a} + \vec{b} + \vec{x} = \vec{o} \quad \Longrightarrow$

$$\vec{x} = \vec{o} - \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 - (-2) - 4 \\ 0 - 3 - (-3) \\ 0 - 8 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Die Abbildung ($\vec{v}$ konstant, $\mathrm{P} \in \mathbb{R}^3$)

$$V: \ \mathrm{P} \to \mathrm{P}' \quad \text{mit} \quad \overrightarrow{\mathrm{PP}'} = \vec{v}$$

ist eine Parallelverschiebung um $\vec{v}$. Andere Schreibweise:

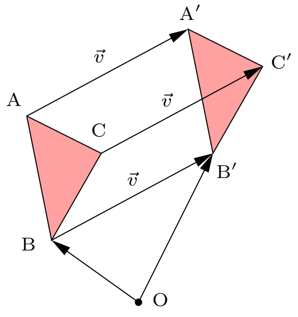
$$V: \ \mathrm{P} \to \mathrm{P}' \quad \text{mit} \quad \overrightarrow{\mathrm{OP}'} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \vec{v}$$

Parallelverschiebung:

$\overrightarrow{\mathrm{OA}'} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \vec{v}$

$\overrightarrow{\mathrm{OB}'} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \vec{v}$

$\overrightarrow{\mathrm{OC}'} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \vec{v}$



Definitionen und Regeln

Die S-Multiplikation

Der Betrag eines Vektors ist definiert als die Länge eines seiner Repräsentanten. Nebenstehender Abbildung entnimmt man:

$$|\vec{a}|^2 = \overline{\mathrm{OF}}^2 + a_3^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

$$\boxed{\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

Im Gegensatz zu einem Vektor nennt man eine Zahl auch einen *Skalar*.

Die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar, die sogenannte *S-Multiplikation* definiert man wie folgt:

$$\boxed{\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \lambda \cdot a_2 \\ \lambda \cdot a_3 \end{pmatrix}}$$

$$|\lambda\vec{a}| = \sqrt{(\lambda a_1)^2 + (\lambda a_2)^2 + (\lambda a_3)^2} =$$
$$= \sqrt{\lambda^2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)} = |\lambda|\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\boxed{|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|}$$

Nebenstehender Abbildung entnimmt man unter der Annahme $\lambda > 0$:

$$\tan \sphericalangle \mathrm{X'OF'} = \frac{\lambda a_2}{\lambda a_1} = \frac{a_2}{a_1} = \tan \sphericalangle \mathrm{XOF}$$

$$\Longrightarrow \quad \sphericalangle \mathrm{X'OF'} = \sphericalangle \mathrm{XOF}, \text{ d.h. } \mathrm{F'} \in \mathrm{OF}$$

Aus den Strahlensätzen (siehe S.58) folgt

$$\frac{\overline{\mathrm{OF'}}}{\overline{\mathrm{OF}}} = \frac{a_1'}{a_1} = \lambda = \frac{|\lambda\vec{a}|}{|\vec{a}|} = \frac{\overline{\mathrm{OA'}}}{\overline{\mathrm{OA}}}$$

Wie oben zeigt man: $\mathrm{A'} \in \mathrm{OA}$ (analog für $\lambda < 0$).

Zwei Vektoren $\vec{a} \neq \vec{o}$ und $\vec{b} \neq \vec{o}$ heißen parallel, wenn ein beliebiger Repräsentant von $\vec{a}$ parallel zu einem beliebigen Repräsentanten von $\vec{b}$ ist.

Somit gilt:

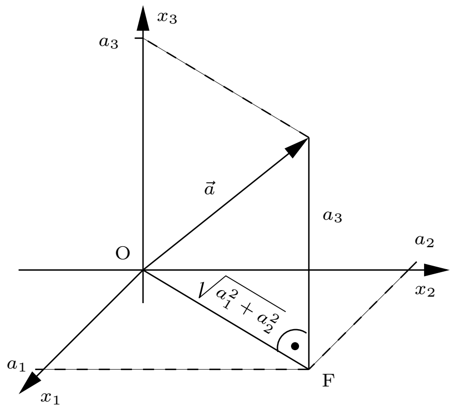
$$\boxed{\lambda \cdot \vec{a} \parallel \vec{a} \quad \text{für } \vec{a} \neq \vec{o} \text{ und } \lambda \neq 0}$$

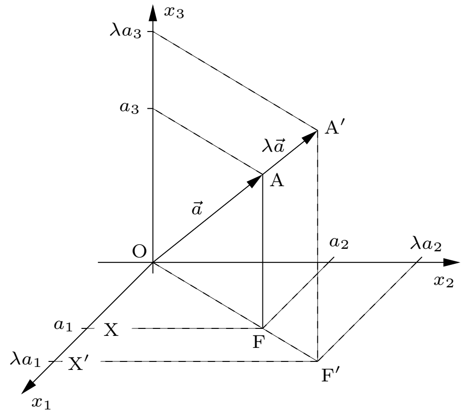
Weiter gilt für $\vec{a} \neq \vec{o}$ und $\vec{b} \neq \vec{o}$:

$$\boxed{\vec{a} \parallel \vec{b} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ mit } \vec{b} = \lambda\vec{a}}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3}$$

Beispiele





FA und F′A′ stehen senkrecht auf der x_1x_2-Ebene, sind also parallel. Daraus folgt, dass A, A′, F und F′ in einer Ebene liegen, nennen wir sie E. Aus $\mathrm{F} \in \mathrm{E}$ und $\mathrm{F'} \in \mathrm{E}$ folgt $\mathrm{FF'} \subset \mathrm{E}$ und damit wegen $\mathrm{O} \in \mathrm{FF'}$ auch $\mathrm{O} \in \mathrm{E}$. O, A, A′, F und F′ liegen also in einer Ebene.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 77 \\ 17 \\ -9 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1001 \\ 221 \\ -117 \end{pmatrix}, \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 1155 \\ 255 \\ -145 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1001}{77} = \frac{221}{17} = \frac{-117}{-9} = 13 \quad \Longrightarrow \quad \vec{a} \parallel \vec{b}$$

$$\frac{1155}{77} = \frac{255}{17} = 15, \; \frac{-145}{-9} \neq 15 \quad \Longrightarrow \quad \vec{a} \nparallel \vec{c}$$

Division eines Vektors durch einen Skalar:

$$\frac{\vec{a}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \cdot \vec{a}$$

z.B. $\begin{pmatrix} 16 \\ -12 \\ 24 \end{pmatrix} : 8 = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 16 \\ -12 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1{,}5 \\ 3 \end{pmatrix}$

Definitionen und Regeln | **Beispiele**

Die Lösung der Gleichung $\vec{a}+\vec{x}=\vec{o}$ heißt *Gegenvektor* von $\vec{a}$ und wird mit $-\vec{a}$ bezeichnet.

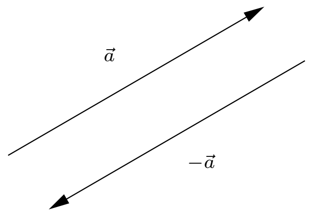
$$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad -\vec{a}=\vec{o}-\vec{a}=\begin{pmatrix}-a_1\\-a_2\\-a_3\end{pmatrix}$$

Andererseits gilt

$$(-1)\cdot\vec{a}=\begin{pmatrix}-a_1\\-a_2\\-a_3\end{pmatrix}$$

d.h.

$$-\vec{a}=(-1)\cdot\vec{a}$$



Der Gegenvektor $-\vec{a}$ von $\vec{a}$

- hat die gleiche Länge wie $\vec{a}$
- ist parallel zu $\vec{a}$
- zeigt in die Gegenrichtung von $\vec{a}$

Rechenregeln für die S-Multiplikation:

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\lambda&=\lambda\cdot\vec{a}\\ \lambda(\mu\vec{a})&=(\lambda\mu)\vec{a}\\ \lambda(\vec{a}+\vec{b})&=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}\\ (\lambda+\mu)\vec{a}&=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}\end{aligned}$$

Spezialfälle:

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot 0=0\cdot\vec{a}&=\vec{o}\\ 1\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot 1&=\vec{a}\\ \vec{o}\cdot\lambda=\lambda\cdot\vec{o}&=\vec{o}\\ \vec{a}-\vec{a}&=\vec{o}\end{aligned}$$

Dividiert man einen Vektor $\vec{a}$ durch seinen Betrag, erhält man einen Vektor, der in die Richtung von $\vec{a}$ zeigt, aber den Betrag eins hat, den Einheitsvektor $\vec{a}_0$ von $\vec{a}$:

$$\boxed{\vec{a}_0=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}}$$

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad \vec{a}_0=\frac{1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$$

Die Geschwindigkeit $\vec{v}$ eines startenden Flugzeugs hat den Betrag 56 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ und ist parallel zum Vektor $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$.

$$\vec{v}=\frac{|\vec{v}|}{|\vec{a}|}\cdot\vec{a}=4\sqrt{14}\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}\frac{\text{m}}{\text{s}}\approx\begin{pmatrix}30\\45\\15\end{pmatrix}\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ein Ausdruck der Form

$$\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\ ...\ +\lambda_n\vec{a}_n$$

heißt *Linearkombination* der Vektoren $\vec{a}_1$, ... $\vec{a}_n$.

Die Vektoren

$$\vec{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \vec{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \vec{e}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

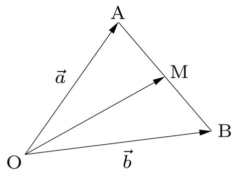
heißen *Basiseinheitsvektoren* des $\mathbb{R}^3$.

Jeden Vektor $\vec{a}$ kann man als Linearkombination der Basiseinheitsvektoren schreiben:

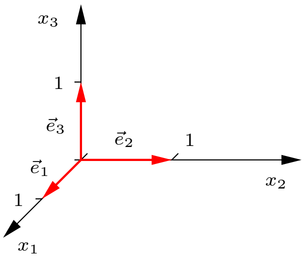
$$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3$$

M ist der Mittelpunkt von [AB]. Gesucht ist $\overrightarrow{\text{OM}}$ als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Mit $\overrightarrow{\text{AB}}=\vec{b}-\vec{a}$ folgt



$$\overrightarrow{\text{OM}}=\vec{a}+\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{a})$$



Definitionen und Regeln

Das Skalarprodukt

Mit dem *Skalarprodukt* wird zwei Vektoren eine reelle Zahl (Skalar) zugeordnet. Ist φ der Winkel, den die beiden Vektoren einschließen, dann definiert man

$$\boxed{\vec a\cdot\vec b = |\vec a|\cdot|\vec b|\cdot\cos\varphi}$$

Bezeichnet a_b die Länge der Projektion von $\vec a$ auf die Richtung von $\vec b$ und b_a die Länge der Projektion von $\vec b$ auf die Richtung von $\vec a$, dann gilt

$$a_b = |\vec a|\cos\varphi \quad \text{und} \quad b_a = |\vec b|\cos\varphi$$

und damit

$$\vec a\cdot\vec b = a_b\cdot|\vec b| = b_a\cdot|\vec a|$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Für } \vec a\neq\vec o \text{ und } \vec b\neq\vec o \text{ gilt}\\[1em] \qquad \vec a\cdot\vec b = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \vec a\perp\vec b\end{array}}$$

$$\vec a^2 = \vec a\cdot\vec a = |\vec a|\cdot|\vec a|\cdot\cos 0 = |\vec a|^2 \qquad \Longrightarrow$$

$$\boxed{\vec a^2 = |\vec a|^2}$$

Für die Basiseinheitsvektoren gilt

$$\vec e_1^{\,2} = \vec e_2^{\,2} = \vec e_3^{\,2} = 1$$

$$\vec e_1\vec e_2 = \vec e_1\vec e_3 = \vec e_2\vec e_3 = 0$$

und damit

$$\vec a = \begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix} \text{ und } \vec b = \begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\vec a\,\vec b &= (a_1\vec e_1 + a_2\vec e_2 + a_3\vec e_3)(b_1\vec e_1 + b_2\vec e_2 + b_3\vec e_3) =\\ &= a_1b_1\vec e_1^{\,2} + a_2b_2\vec e_2^{\,2} + a_3b_3\vec e_3^{\,2} + a_1b_2\vec e_1\vec e_2 +\\ &\quad + a_1b_3\vec e_1\vec e_3 + a_2b_1\vec e_2\vec e_1 + a_2b_3\vec e_2\vec e_3 +\\ &\quad + a_3b_1\vec e_3\vec e_1 + a_3b_2\vec e_3\vec e_2 =\\ &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}$$

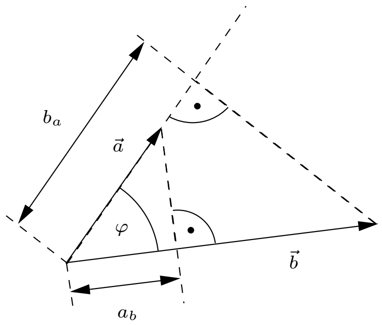
Aus

$$|\vec a|\cdot|\vec b|\cdot\cos\varphi = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

folgt

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{|\vec a|\cdot|\vec b|}}$$

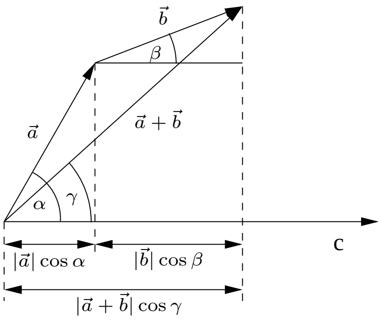
Beispiele



Rechenregeln für das Skalarprodukt:

$$\boxed{\begin{aligned}\vec a\cdot\vec b &= \vec b\cdot\vec a\\ (\lambda\vec a)(\mu\vec b) &= \lambda\mu(\vec a\,\vec b)\\ (\vec a+\vec b)\vec c &= \vec a\vec c + \vec b\vec c\end{aligned}}$$

Beweis des Distributivgesetzes:



Der Abbildung entnimmt man

$$|\vec a|\cos\alpha + |\vec b|\cos\beta = |\vec a+\vec b|\cos\gamma \;\Big|\cdot|\vec c|$$

$$\underbrace{|\vec a|\cdot|\vec c|\cos\alpha}_{\vec a\cdot\vec c} + \underbrace{|\vec b|\cdot|\vec c|\cos\beta}_{\vec b\cdot\vec c} = \underbrace{|\vec a+\vec b|\cdot|\vec c|\cos\gamma}_{(\vec a+\vec b)\cdot\vec c}$$

$$\vec a = \begin{pmatrix} 2\\ 5\\ 7\end{pmatrix},\quad \vec b = \begin{pmatrix} 1\\ 4\\ -3\end{pmatrix},\quad \vec c = \begin{pmatrix} 3\\ -4\\ 2\end{pmatrix}$$

$\vec a\cdot\vec b = 2 + 20 - 21 = -1 \Longrightarrow \vec a$ nicht senkrecht $\vec b$

$\vec a\cdot\vec c = 6 - 20 + 14 = 0 \Longrightarrow \vec a\perp\vec c$

φ: Winkel zwischen $\vec a = \begin{pmatrix} 2\\ 3\\ 6\end{pmatrix}$ und $\vec b = \begin{pmatrix} -5\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$:

$$\cos\varphi = \frac{-10+6+18}{7\sqrt{38}} = \frac{\sqrt{38}}{19}$$

$$\varphi = 71{,}07^\circ$$

Definitionen und Regeln	**Beispiele**

Wahrscheinlichkeit

Inhaltsverzeichnis

Index